
بسم الله الرحمن الرحيم

لازم به تذکـــــــر است به جهت این که Font بکاربرده شده در اسلاید

ها B Nnazanin می باشد خواهشمندیم قبل از نمایش اسلایـــــدها

به نصب Font مذکور که در CD موجود می باشد اقدام نمایید.

نـــام درس: آنالیز عددی ۱

تعداد واحد: ۴ واحد

منبع درس: کتاب آنالیز عددی۱

مؤلـف: دکتر اسماعیل بابلیان

تهیه کننده: محسن ساعدی

نوع درس: پـــــــــــایه

ناشـــــر: دانشگاه پیـــــــام نور

فهرست

فصل پنجم: مشتق گیری وانتگرالگیری

شامل ۱۰۵ اسلاید می باشد

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

شامل ۲۵ اسلاید می باشد

فصل اول

خطاها

مقدمه

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی با منشاء این خطاها ، نحوه بروز آنها و کنترل آنها موضوع این فصل است.

هدفهای کلی

۱) شناخت منابع خطاوتشخیص آنها در هر مسئله

۲) بررسی منابع خطاو راه های کمینه سازی آنها

۳) شناخت انواع خطاها ورابطه آنها با دقت یک تقریب

۴) جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی

۵) شناخت روش های محاسبه پایدار وناپایدار

۶) محاسبه مقدار تقریبی توابع.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱) منشا خطاهارا در یک مسئله واقعی تعیین کند

۲) بسط اعدادرا در مبناهای مختلف بنویسدوازبسط اعشاری یک عدد، تقریبی مناسب انتخاب کند.

۳) انواع خطاها رابشناسد و ارتباط آنهارابادقت یک تقریب بداند

۴) یک محاسبه عملی را چنان تر تیب وبه انجام رساندکه رشد خطاها حداقل باشد.

۵) محاسبه توابع وسری هارا با حداقل خطا وعملیات انجام دهد.

الف) خطای مدل

این خطا شامل صرفنظر کردنها، چشم پوشیها و ساده نویسیها جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.

ب) خطای داده ها

این خطا به هنگام اندازه گیری و برآورد مفروضات مسئله پیش می آید.

پ) خطای نمایش اعداد

نمایش اعشاری یا دودوئی اکثر اعداد با تعدادی متناهی رقم امکان پذیر نیست. از این رو، انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط یک عدد سبب این خطا می شود.

ت) خطای اعمال حسابی

حاصل بعضی اعمال بر دو عامل عددی دارای تعداد نامتناهی رقم است و انتخاب تعدادی متناهی از این ارقام سبب این خطا می شود.

ث) خطای روش

روشهای عددی عموما تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می دهند. دقت این تقریب به نوع روش و مرحله توقف آن بستگی دارد.

1-۱-۱ تبصره

اگر ضمن انجام عملیات بر روی عدد ۲۳۳ ، آن را۲۳۱ منظور کنیم یک اشتباه مرتکب شده ایم نه خطا .همچنین اشکالاتی که در اثر تغییر ناگهانی وشدیدولتاژ برق برای کامپیوتر پیش می آید. وبعضاً موجب نتایج عددی غلط می شودرا خطا نمی نامیم.در این فصل تنها به بررسی خطاها می پردازیم .

از پنج منبع خطایی که ذکر شد خطای مدل و خطا ی داده ها به نوع مســـــئله بستگی دارند.وافرادی که دررشته های مختلف به تعیین مدل مسئله می پردازند مسئول آنها هستند. اما، سه خطای بعدی مربوط به آنالیز عددی است.

در این فصل خطای نمایش اعدادوخطای اعمال حسابی را موردبررسی دقیق قرار می دهیم.معمولاًخطای هرروش هنگام بررسی آن روش موردبحث قرار می گیرد وکران بالایی برای خطای جواب های تقریبی به دست می آید.

۱-۲ نمایش اعداد

در اکثر مسائل، که درآنها جواب عددی مورد نظر است،معمولاً تعداد عملـــیات

ونوع آنها به گونه ای است که انجام آنها با دست وبه کمک قلم وکاغذ بســـــیار

مشکل وگاهی غیر ممکن است.برای تعیین جواب عددی مسائل از ماشـــــــین

حساب یا کامپیوتر استفاده می شود، که از این به بعد به آنها وسایل محاسباتی می گوییم .

همانطورکه می دانیدکاربا کسرهای متعارفی واعداد گنگ (اصم) توسط ماشین

حساب و کامپیوتر عملی نیست(البته کار باکسرها به طور محـــــدود در ماشین

حساب هاامکان دارد)،ولی براحتی می توان با اعداد اعشاری کار کرد.

۱-۲-۱ بسط اعشاری اعداد

منظور از بسط اعشاری یک عدد مثبت نمایش آن به شکل

$$a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m^{-1}} + \dots$$

است که در آن

$$a_{m \neq} o, m \in z, o \leq a_i \leq 9$$

بسط فوق برای اعداد صحیح و اعشاری راحت است. مثلا،

$$2347 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^\circ$$

$$37/409 = 3 \times 10^1 + 7 \times 10^\circ + 4 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-3}$$

اما برای اعداد کسری و کنگ باید وجود و نحوه به دست آوردن بسط اعشاری را توضیح دهیم. در مورد وجود و یکتایی بسط اعشاری برای هر عـــدد حقیقی مثبت قضیه زیر را داریم.

۱-۲-۲ قضیه

اگر A عددی حقیقی و مثبت باشد دارای بسط اعشاری منحصر به فرد زیر است:

$$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

که در آن $0 \le a_i \le 9, a_m \neq 0$ و بی نهایت بار $a_i \neq 9$. شرط بی نهایت بار $a_i \neq 9$.

برای یکتائی بسط لازم است زیرا ، طبق فرمول حد مجموع یک سری هندسی داریم:

$$0/999999\ldots = 0/9 + 0/0 + 0/009 + \ldots = \frac{0/9}{1-0/1} = 1$$

یعنی اگر شرط مذکور را بر داریم برای عدد دو بسط اعشاری خواهیم داشت. همچنین داریم.

$$0/27 = 0/269999\ldots, \quad 0/45 = 0/449999\ldots$$

و بطور کلی ، هر عدد اعشاری مختوم (با تعدادی متناهی رقم) دارای دو بسط اعشاری خواهد بود.

۱-۲-۳ مثال

$$\frac{2}{3}=0/6666...=0/6 \qquad ,\frac{22}{7}=3/142857$$

منظور از ۱۴۲۸۵۷ آن است که دسته ارقام ۱۴۲۸۵۷ ، با همین ترتیب ، مرتبا تکرار می شوند، همچنین در مورد۶.

$$\sqrt{2}=1/4142...,\frac{3017}{198}=15/237,\frac{23}{5}=4/6$$

در مثالهای بالا بسط $\frac{23}{5}$ مختوم و بسط بقیه اعداد نامختوم است. بسط $\frac{22}{7},\frac{2}{3}$ $\frac{3017}{198}$ نامختوم و متناوب است اما بسط $\sqrt{2}$ نامختوم است ولی متناوب نیست(به قضیه زیر و نتیجه آن توجه کنید).

۴-۲-۱ قضیه

اگر بسط اعشاری عدد Aمختوم یا نامختوم و متناوب باشد ، A یک عدد گویاست.

برهان

ابتدا فرض می کنیم که بسط اعشاری A مختوم باشد. مثلا،

$$A = a_1a_2...a_m / b_1b_2...b_n$$

که در آن $a_1, a_2, ... a_m$ ارقام قسمت صحیح A و $b_1, b_2, ... b_n$ ارقام بعد از ممیز هستند.

با این توضیحات داریم:

$$A = a_1a_2...a_m + 0/b_1b_2...b_n$$

$$A - a_1a_2...a_m = 0/b_1b_2...b_n = \frac{b_1b_2...b_n}{10^n}$$

$$A = \frac{10^n \times a_1a_2...a_m + b_1b_2...b_n}{10^n}$$

چون صورت و مخرج کسر اعداد صحیح هستند A گویـــــاست.

حال فرض کنید بسط اعشاری A نامختوم و متناوب باشد. مثلا

$$A = a_1a_2...a_m / b_1b_2...b_nc_1c_2...c_k$$

طبق قرارداد قبلی ارقام $c_1c_2...c_k$ مرتبا تکرار می شوند (توجـــه کنید که ممکن است m یا n صفر باشدکه در ایـن صورت $a_1...a_m$ یا $b_1...b_n$ وجـــود نخواهـــد داشت). از (۷,۱) نتیجه می شود:

$$A = a_1a_2...a_m / b_1b_2...b_nc_1c_2...c_k$$

ضمنا داریم:

$$\overline{c_1c_2\ldots c_k} = c_1c_2\ldots c_k\left[\frac{1}{10^k}+\frac{1}{10^{2k}}+\ldots\right]$$

حد مجموع سری داخل پرانتز برابر است با

$$\frac{\frac{1}{10^k}}{1-\frac{1}{10^k}} = \frac{1}{10^k-1}$$

بنابراین،

$$\overline{c_1c_2\ldots c_k} = \frac{c_1c_2\ldots c_k}{10^k-1}$$

در نتیجه ،

$$A = a_1a_2\ldots a_m / b_1b_2\ldots b_n + \frac{c_1c_2\ldots c_k}{10^n\left(10^k-1\right)} \qquad (۱. ۸)$$

که نشان می دهد A گویاست. (چرا؟)

عکس نقیض قضیه ۱-۲-۴ نتیجه مهم زیر را به دست می دهد.

5-2-1 نتیجه

اگر A عددی کنگ باشد بسط اعشاری آن نامختوم است ولی متناوب نیست.

یکی از مسائلی که در این قسمت مطرح می شود نوشتن کسر مساوی یک عدد اعشاری نا مختوم و متناوب است . نحوه به دست آمدن این کسر در قضیه زیر آمده است.

۱-۲-۶ قضیه

اگر $A = a_1 \ldots a_m / b_1 \ldots b_n c_1 \ldots c_k$ آنگاه

$$A = a_1 \ldots a_m + \frac{b_1 \ldots b_n c_1 \ldots c_k - b_1 \ldots b_n}{\underbrace{99 \ldots 9}_{\text{K تا}}\underbrace{00 \ldots 0}_{\text{n تا}}} \qquad (۱. ۹)$$

برهان

بنابر قضیه ۱-۲-۴:

$$0/b_1\ldots b_n c_1\ldots c_k = 0/b_1\ldots b_n + \frac{c_1\ldots c_k}{10^n\left(10^k-1\right)}$$

$$= \frac{\left[10^{n+k}-10^n\right]\times 0/b_1\ldots b_n + c_1\ldots c_k}{10^n\left(10^k-1\right)} = \frac{10^k\times b_1\ldots b_n + c_1\ldots c_k - b_1\ldots b_n}{10^n\left(10^k-1\right)}$$

$$= \frac{b_1\ldots b_n c_1\ldots c_k - b_1\ldots b_n}{10^n\left(10^k-1\right)}$$

واضح است که ، $10^n\left(10^k-1\right) = \underbrace{99\ldots9}_{\text{K تا}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{n تا}}$ و حکم ثابت شده است.

۱-۲-۷ مثال

۱- کسر مربوط به عدد اعشاری $3/0\dot{7}$ را به دست آورید.

بنابر رابطه (۸,۱) داریم:

$$3/0\dot{7}=3/0+\frac{7}{10(10-1)}=3+\frac{7}{90}=\frac{277}{90}$$

و یا بنابر رابطه (۹,۱):

$$3/\dot{7}=3+\frac{07-0}{90}=\frac{277}{90}$$

۲- کسری را به دست آورید که بسط اعشاری آن $15/2\dot{3}\dot{7}$ باشد.

با توجه به قضیه ۱-۲-۶ داریم:

$$m=2, a_1a_2=15, n=b_1=2, k=2, c_1c_2=37$$

بنابر (۹,۱):

$$15/2\dot{3}\dot{7} = 15 + \frac{237-2}{990} = 15 + \frac{235}{990} = 15 + \frac{47}{198} = \frac{3017}{198}$$

۱-۳ بسط اعداد در مبنای ۲

قضیه ۱-۲-۴ و نتیجه ۱-۲-۵ نشان می دهند که بسط اعشاری تمامی اعداد کنگ و بسیاری اعداد گویا نامختوم است . در این بخش خواهید دید که در مبنای ۲ وضع از این هم بدتر است! به این معنا که بسط اکثر اعداد اعشاری مختوم در مبنای ۲ نامختوم است.

۱-۳-۱ بسط اعداد صحیح در مبنای ۲

یک روش، تقسیمات متوالی و کنار هم گذاشتن باقیمانده هاست، که همه با آن آشنا هستید. اما ، این روش قابل تعمیم به اعداد غیر صحیح نیست. در اینجا روشی را، طی چند مثال ، ارائه می کنیم که قابل تعمیم به اعداد غیر صحیح نیز هست. یعنی، با استفاده از آن می توان اعداد اعشاری را در مبنای ۲ نیز به دست آورد.

۱-۳-۲ مثال

۱- عدد ۳۹ را به مبنای ۲ ببرید:

بزرگترین عدد به صورت 2^k که از ۳۹ بیشتر نیست 2^5 می باشد. لذا می نویسیم

$$39 = 2^5 + 7$$

همچنین بزرگترین عدد بصورت 2^k که از ۷ بیشتر نیست 2^2 است. پس،

$$39 = 2^5 + 2^2 + 3$$

ضمنا واضح است که

$$3 = 2^1 + 2^0$$

$$39 = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 100111_2$$

(برای هر توانی از ۲ که وجود نداشته باشد در بسط عدد رقم صفر منظور می شود.)

۲- عدد ۴۸ را در مبنای ۲ بنویسید.

طبق آنچه در مثال قبل عمل شد داریم:

$$48 = 2^5 + 16 = 2^5 + 2^4 = 110000_2$$

۳- عدد $0/75$ را در مبنای ۲ بنویسید.

باز هم بزرگترین عدد به صورت 2^k را که کمتر از $0/75$ باشد به دست می آوریم با توجه به اینکه $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0/5$ می نویسیم،

$$0/75 = 2^{-1} + 0/25$$

در ضمن $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0/25$ پس:

$$0/75 = 2^{-1} + 2^{-2} = 0/11_2$$

۴- عدد ۶۲۵/۹ را در مبنای ۲ بنویسید.

بنابر مثالهای قبل داریم:

$$9=2^3+1=2^3+2^\circ=1001_2$$

$$0/625=0/5+0/125=2^{-1}+2^{-3}=0/101_2$$

بنابراین

$$9/625=1001/101_2$$

بنابر آنچه در مثالهای بالا دیدید برای بردن یک عدد به مبنای ۲ کافی است که جدول ۱-۲ از اعداد را در نظر داشته باشیم و طبق آنچه گفته شد عمل کنیم.

0	0
0	0
0	0
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
2^0	1
2^{-1}	0.5
2^{-2}	0.25
2^{-3}	0.125
2^{-4}	0.0625
2^{-5}	0.03125
0	0
0	0
0	0

جدول ١-٢

اما، بردن اعداد اعشاری به مبنای دو همیشه به سادگی مثالهای بالا نیست . به

مثال بعدی توجه کنید.

۵- عدد $0/34$ در مبنای دو بنویسید.

با توجه به جدول ۱-۲ داریم:

$$0/34=0/25+0/09=0/25+0/0625+0/0275$$

$$=0/25+0/0625+0/015625+0/011875$$

$$=2^{-2}+2^{-4}+2^{-6}+\ldots(0/010101\ldots)_2$$

همانطور که از مثال بالا پیداست معلوم نیست که بسط $0/34$ درمبنای دو مختوم است یا نامختوم ، و اگر نامختوم است متناوب است یا نه، در ضمن در هر مرحله پیدا کردن باقیمانده و یافتن رقم بعد ، با استفاده از جدول ۱-۲ ، کار راحتـــــی نیست. در زیر روش آسانتری برای تعیین بسط اعداد در مبنای دو ارائه میکنیم.

۱-۳-۳ بسط اعداد در مبنای دو

در این قسمت روشی را شرح می دهیم که به سادگی بسط هر عدد بین۰ و ۱ را در مبنای دو به دست می دهد و به راحتی قابل تعمیم به تعیین بسط یک عدد حقیقی در مبنای دلخواه R است که در آن $1<R\in N$. از همه مهمتر اینکه این روش تکــراری است و با طبیعت کامپیوتـــــر بعنوان وسیله ای سریع برای انجام کارهای تکـــراری سازگار است.

با توجه به مطالب بالا، کافی است بسط A را که

$$0 < A < 1$$

در مبنای دو به دست آوریم. فرض کنید بسط مورد نظر چنین باشد:

$$A = [0/b_1b_2b_3\ldots]_2$$

بعبارت دیگر

$$A = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \ldots \qquad (*)$$

با ضرب طرفین (*) در ۲ به دست می آوریم:

$$2A = b_1 + b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \ldots$$

قرار می دهیم:

$$x = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \ldots$$

و ادعا می کنیم که $0\le x<1$. واضح است که چون همواره $b_i \ge 0$

باید $x \ge 0$ همچنین با توجه به اینکه باید بی نهایت بار $b_i \ne 1$ (این شرط معادل بی نهایت

بار $a_i \ne 0$ دومبنای دو است)،

$$x<1\times 2^{-1}+1\times 2^{-2}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

بنابراین ،

$$2A=b_1+x,\qquad (0\le x<1)$$

در نتیجه ، جزء صحیح دو طرف یکسان است،یعنی:

$$[2A]=[b_1+x].$$

چون b_1 صحیح است و $0\le x\le 1$ داریم:

$$[b_1+x]=b_1+[x]=b_1$$

پس:

$$b_1 = [2A]$$

با بدست آمدن b_1 می توان (*) را چنین نوشت:

$$2A - b_1 = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \ldots$$

با مقایسه این تساوی و (*) نتیجه می گیریم که

$$b_2 = [2(2A - b_1)]$$

لذا اگر $2A - b_1$ را مجددا A بنامیم ، یعنی $A \leftarrow 2A - b_1$ آنگاه:

$$b_2 = [2A]$$

واضح است که اگر در مرحله ای $A=0$، کار تمام است و بسط A در مبنـــای دو مختوم است. اگر همواره $A \neq 0$ می توان این عمل را تا آنجا که مایل باشیم ادامه دهیم . در عمل تعدادی متناهی از ارقام بسط A حســـاب می شود، مثلا n رقم.

۱-۳-۴ تذکر

با تبدیل عدد ۲ به عدد طبیعی $R>1$ می توان بسط A را در مبنای R به دست آورد. (به مثالهای ۲ و ۳ از ۱-۳-۵ توجه کنید)

۱-۳-۵ مثال

۱- بسط عدد $\frac{3}{7}$ را در مبنای ۲ بنویسید.

قرار می دهیم $A=\frac{3}{7}$ در نتیجه

$$b_1=[2A]=\left[\frac{6}{7}\right]=0$$

که از آن نتیجه می شود، $2A-b_1=\frac{6}{7}$ پس مقدار جدید A برابر $\frac{6}{7}$ است.

بنابراین،

$$b_3=[2A]=\left[\frac{10}{7}\right]=1$$

$$2A-b_2=\frac{12}{7}-1=\frac{5}{7}$$

$$b_2=[2A]=\left[\frac{10}{7}\right]=1$$

و $\frac{3}{7} = 2A - b_3$ چون به مقدار اولیه A رسیدیم داریم:

$$\frac{3}{7} = [0/011011011...]_2 = \left[0/\dot{0}1\dot{1}\right]_2$$

که، همانند آنچه در مبنای ۱۰ داشتیم، منظور از $\dot{0}1\dot{1}$ آن است که دسته ارقام

۰۱۱ مرتبا تکرار می شوند . عملیات بالا نشان می دهند که بسط $\frac{3}{7}$ در مبنای دو

نامختوم و متناوب است. عملیات مربوط به تعیین ارقام بسط A در یک مبنا را می توان

با یک جدول ، نظیر جدول (۱-۳) ، نمایش داد.

جدول (۱-۳)

A	i	$2A$	$b=[2A]$	$2A-b$
$\frac{3}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{6}{7}$
$\frac{6}{7}$	2	$\frac{12}{7}$	1	$\frac{5}{7}$
$\frac{5}{7}$	3	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{7}$				

۲- بسط عدد $0/3$ در مبنای ۵ بدست آورید. قرار می دهیم $A=0/3$ و $R=5$ داریم:

A	i	5A	b=[5A]	5A-b
0/3	1	1/5	1	0/5
0/5	2	2/5	2	0/5
0/5				

بنابراین،

$$0/3=(0/1222...)_5=(0/12)_5$$

۳- بسط کسر $\frac{1}{7}$ را در مبنای ۱۰ به دست آورید.

در این مثال $A = \frac{1}{7}$ و $R = 10$ جدول زیر را داریم:

A	1	$10A$	$b = [10A]$	$10A - b$
$\frac{1}{7}$	1	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{7}$	2	$\frac{30}{7}$	4	$\frac{2}{7}$
$\frac{3}{7}$	3	$\frac{20}{7}$	2	$\frac{2}{7}$
$\frac{6}{7}$	4	$\frac{60}{7}$	8	$\frac{4}{7}$
$\frac{4}{7}$	5	$\frac{40}{7}$	5	$\frac{5}{7}$
$\frac{5}{7}$	6	$\frac{50}{7}$	7	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{7}$				

بنابراین،

$$\frac{1}{7}=0/\dot{1}4285\dot{7}$$

البته بسط بالا را با تقسیم ۱ بر ۷ نیز می توان به دست آورد (امتحان کنید).

۴- بسط عدد اعشاری $0/1$ را در مبنای ۲ به دست آورید.

جدول زیر بسط مطلوب را به دست می دهد.

A	i	2A	b=[2A]	5A-b
0/1	1	0/2	0	0/2
0/2	2	0/4	0	0/4
0/4	3	0/8	0	0/8
0/8	4	1/6	1	0/6
0/6	5	1/2	1	0/2
0/2				

$$0/1 = (0/0001100110011...)_2 = (0/00011)_2$$

توجه کنید که ساده ترین عدد اعشاری، یعنی 0/1 دارای بسط نامختوم درمبنای دو است.

ثابت می شودکه بسط هر عدد گویا درهر مبنایی مختوم و متناوب است.

با توجه به اینکه تعدادی محدود از ارقام بســـــط هر عدد در مبنای دو قابل نگهداری در حافظه وسایل محاسباتی است، نتیجه می گیریم که تقریبا تمامی اعداد غیر صحیح به طور تقریبی در حافظه این وسایل ذخیره می شوند و این یکی از ضعفهای مهم این وسایـــــل است که در عمل باعث مشکلات زیادی

می شود .

بعدا خواهیم دید که خطای جزئی که در ذخیره اعداد پیش می آید گاهی سبب به دست آوردن جوابهای غیر قابل قبـــول برای بعضی مسائل می شود. یکی از مباحث بسیار مهم در آنالیز عددی نیز پیش بینی اثرات خطای نمایش اعداد در نتایج عددی است. در قسمتهـــــای بعدی این فصل به برخی از این اثرات اشاره خواهیم کرد.

۱-۴ ارقام با معنا

در ریاضیات اعداد زیر با هم مساوی اند. 7/4, 7/40, 7/400

اما در علومی که با اندازه گیری سر و کـــــار دارند ، مانند فیزیک، شیمی و ...

چنین نیست. اگر گفته شود طولـــی را اندازه گرفتیم و نتیجـــه اندازه گیری

7/40 متر بوده است. این گفته بدان معناست که وسیله اندازه گیری دقتی تا

حد سانتیمتر داشته و حداکثر خطا 0/5 سانتیمتر است. اگر نتیجه اندازه گیری

7/400 متر بود معلوم مــــی شد که واحد اندازه گیری دقتی درحد میلیمتر داشته و

حداکثر خطا 0/5 میلیمتر بوده است. از این رو ، صفرهای جلــوی این عدد را، که نشانه

دقت اندازه گیری هستند، صفرهای بامعنا میگویند

اکنون تعریفی نسبتا دقیق از ارقام با معنا برای یک عدد ارائه می کنیم.

۱-۴-۱ نمایش علمی اعداد

فرض کنید A عددی مخالف صفر باشد . واضح است که A را همواره می توان به صورت:

$$A = a \times 10^{b}$$

نوشت که در آن b عددی صحیح است و

$$1 \leq |a| < 10$$

در این صورت می گوییم A بصورت علمی نمایش داده شده است. در این

نمایش a را مانتیس و b را نمای عدد A می نامند.

۱-۴-۲ تعریف

اگر عددی اعشاری باشد و $1 \leq |a| < 10$، در این صورت ارقام با معنای a عبارت اند از ارقام مخالف صفر a، بین این ارقام و صفرهایی که جلوی عدد به منظـــــورنمایش دقت قرار دارند. ارقام با معنای عدد مخالف صفر A ، همان ارقام با معنای مانتیس A تعریف می شود.

۱-۴-۳ مثال

الف) اگر $A=213/76$ آنگاه $A=2/1376\times10^{2}$ و تعداد ارقام بامعنای A پنج است

ب) اگر $A=0/00726$ آنگاه $A=7/26\times10^{-3}$ و A دارای ۳ رقم با معناست.

پ) اگر $l=2000$ متر آنگاه $l=2/000\times10^{3}$ متر و l دارای ۴ رقم با معناست.

ت) اگر $d=78$ کیلو متر آنگاه $d=7/8\times10^{4}$ متر و d دارای دورقم با معناست.

۱-۵ انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم

در بخشهای ۱-۲ و ۱-۳ نشان داده شد که بسط اکثر اعداد دارای بی نهایت رقم است. ضمنا، می دانیم که وسایل محاسباتی از نظر نگهداری این ارقام محدودیت دارند. از ااین رو، باید تعدادی متناهی ، که به نوع وسیله محاسباتی ، قدرت آن و دقت لازم بستگی دارد، از ارقام بسط اعشاری یا دودویی عدد انتخاب کنیم . این کار به دو روش انجام می گیرد.

۱-۵-۱ روش قطع کردن

در این روش، با توجه به تعداد ارقامی که می توانیم یا می خواهیم نگهـــــداری کنیم. بسط عدد را از رقم معینی قطع می کنیم. این رقم را اولین رقم ناخواسته می نامیم. بنابراین در روش قطع بسط عدد اعشاری، یا دودوئی، عدد را از اولین رقم ناخواسته قطع می شود. مثلاً، اعداد زیر تا دو رقم اعشار (یا تا D ۲) قطع شده اند.

$$\pi = 3/14(2D)\ , e = 2/71(2D)\ , \frac{5}{3} = 1/66(2D)$$

می توان گفت که اعداد سمت راست تساویها ی بالا، قطع شده اعداد سمت چپ تا 3 رقم با معنا $(3S)$ هستند

۲-۵-۱. روش گرد کردن

در این روش با توجه به مقدار اولین رقم ناخواسته، تقریبی از عدد را بدست می آوریم. مثلا در گرد کردن تا دو رقم اعشار :

$$2/3476 = 2/35(2D), 3/7830 = 3/78(2D)$$

یعنی، اگر اولین رقم ناخواسته بزرگتر از ۵ باشد یک واحد به رقـــــم قبل از آن اضافه و عدد را قطع می کنیم، و اگر اولین رقم ناخواسته کمتر از ۵ باشد عدد را بدون تغییر قطع می کنیم. اما، وقتی اولین رقم ناخواسته ۵ باشد به گونه دیگری عمل می کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$3/685000106 = 2/69(2D)$$

(توجه کنید که در مثال بالا اولین رقم ناخواسته ۵ است و بعد از آن رقم مخالف صفر وجود دارد)

(رقم قبل از ۵ فرد است) $17/835 = 17/84(2D)$

(رقم قبل از ۵ زوج است) $2/465 = 2/46(2D)$

علت اصلی در نحوه گرد کردن اعداد در دو حالت اخیر آن است که مقادیری که از اعداد کم یا به آنها اضافه می شود در عمل همدیگر را خنثی می کنند. بعبارت دیگر، در یک مسئله با محاسبات زیاد، احتمال وقوع اعداد اعشاری با رقم سوم اعشار ۵ و رقم دوم اعشار زوج یا فردیکسان است، از این رو میانگین خطای گرد کردن متناظر با آنها صفر است.

۱-۵-۳ گرد کردن تا n رقم اعشار

به طور کلی اگر $A \neq 0$ دارای بسط اعشاری زیر باشد

$$A = a_1 a_2 \ldots a_m / b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} \ldots$$

و بخواهیم گرد شده A را تا n رقم اعشار به دست می آوریم چنین عمل می کنیم

I: اگر $b_{n+1} > 5$ یک واحد به b_n اضافه و عدد را از b_{n+1} قطع می کنیم

II. اگر $b_{n+1} < 5$ عدد را از b_{n+1} قطع می کنیم.

III. اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشدمانند (I)

عمل می کنیم.

IV. اگر $b_{n+1}=5$ و بعد از این رقم، رقم دیگری نباشد، یا فقط صفر باشد، در صورتی که b_n فرد باشد و در غیر اینصورت مانند (II) عمل می کنیم.

۱-۵-۴ مثال

۱- در زیر گرده شده، چند عدد را ملاحظه کنید

$$\frac{2}{3}=0/667(3D),\ \sqrt{2}=1/414(3D),3/99=4/00(2D)$$

$$\frac{22}{7}=3/14(3S)\ ,\pi=3/142(4S)\ ,\sqrt{3}=2(1S)\ ,1/99=2/0(2S)$$

۲- اگر a گرد شده $\frac{2}{3}$ و b قطع شده دو رقم اعشار باشند داریم:

$$a = 0/67, \left|\frac{2}{3} - a\right| = \frac{1}{300}$$

$$b = 0/66, \left|\frac{2}{3} - b\right| = \frac{2}{300}$$

یعنی، فاصله b تا $\frac{2}{3}$ است. بعبارت دیگرخطای قطع کردن تا دو برابر خطای گرد کردن است. در عمل بیشتر از گرد کردن استفاده می شود. (هر چنـــد قطع کردن ساده تر است و در اکثر ماشین حسابها از آن استفاده می شود).

۱-۵-۵ نتیجه

اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد، با توجه به نحوه گرد کردن داریم:

$$|A-a| \le 5\times10^{-(n+1)}$$

نامساوی بالا نشان می دهد که هر چه n بزرگتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود، به همین دلیل است که هر وقت دقت زیاد مورد نظر باشد از دقت مضاعف استفاده می شود (که در این صورت دو کلمه از حافظه برای ذخیره یک عدد اعشاری به کار می رود).

با توجه به آنچه گفته شد برای انتخاب تقریبی از یک عــدد معلوم، ابتدا بسط اعشاری آن را به دست می آوریم و سپس گرد شده آن را، تا هـــر تعداد رقم با معنا که می توانیم نگهداری با ذخیره کنیم، معین می کنیم. در کامپیوترهای متوسط معمولا هفت تا هشت رقم با معنا از مانتیس اعداد نگهــداری می شود (البته دقت معمولی) . اگر دقت مضاعف به کار رود تا ۱۷ رقـــم با معنای بسط اعشاری اعداد قابل ذخیره است.

۱-۶ انواع خطا

در آنالیز عددی معمولا تقریبهایی از یک مجهول در دست است ولازم است دقت این تقریبها و رفتار آنها مورد بررسی قرار گیرد.

۱-۶-۱ تعریف

اگر a تقریبی از A باشد و قرار دهیم

$$e(a) = |A - a|$$

آنگاه $e(a)$ را خطای مطلق a نامند.

۱-۶-۲ مثال

۱- فرض کنید $a_n = \frac{n+1}{n}$ خطای a_n بعنوان تقریبی از عدد یک چقدر است؟

$$e(a_n) = \left|1 - \frac{n+1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

مشاهده می شود که هر چه n بزرگتر اختیار شود $\frac{1}{n}$ کوچکتر خواهد و در نتیجه به یک نزدیکتر خواهد شد. اگر بخواهیم خطای a_n از، مثلا ، $0/001$ کوچکتر باشد کافی است قرار دهیم:

$$\frac{1}{n} < 0/001$$

که از آن نتیجه می شود $n > 1000$. اولین n که در نامساوی اخیرصدق می کند ۱۰۰۱ است که به ازای آن

$$a_n = \frac{1002}{1001} = 1/000999(6D)$$

اما همیشه وضع به گونه ای نیست که عدد A را داشته باشیم. معمولا A،مجهول است و یا حتی در حالت معلوم بودن $e(a)$ به راحتی قابل بیان نیست.

۲- می دانیم که ۱/۴۱ تقریبی از $\sqrt{2}$ است. خطای مطلق ۱/۴۱ چیست؟ اگر بسط اعشاری $\sqrt{2}$ را، با استفاده از یک ماشین حساب، بنویسیم یعنی:

$$\sqrt{2} = 1/414213562(9D)$$

خواهیم داشت

$$e(1/41) = \left|\sqrt{2} - 1/41\right| = \sqrt{2} - 1/41$$

$$e(1/41) = 0/004213562...$$

مشاهده می شود که $e(1/41)$ به سادگی قابل بیان نیست و همان $\sqrt{2}-1/41$ بیان ساده تر و دقیقتری از آن است.حال فرض کنید که حدود $\sqrt{2}$ را بدانیم، مثلاً، بدانیم که

$$1/414 < \sqrt{2} < 1/415$$

در این صورت:

$$0/004 < \sqrt{2} - 1/41 < 0/005$$

بنابراین،

$$e(1/41) < 0/005$$

بدیهی است که $0/005$ یک کران بالا برای خطای ۴۱/۱ است و تاحد زیادی مقدار نزدیکی (یا دقت) ۴۱/۱ را به $\sqrt{2}$ نشان می دهد.

در اکثر روشهای آنالیز عددی حدود جواب ، یعنی کران بالا و پایینی برای جواب، قابل محاسبه است که از آنجا کران بالایی ، طبق توضیحات بالا، برای $e(a)$ به دست می آید.

۱-۶-۳ تعریف

هر عدد ناکمتر از $e(a)$ را یک خطای مطلق حدی a نامیم و با e_a نمایش می دهیم.

بنابراین ، همواره $e(a) \le e_a$ و e_a منحصر به فرد نیست (بر خلاف $e(a)$)

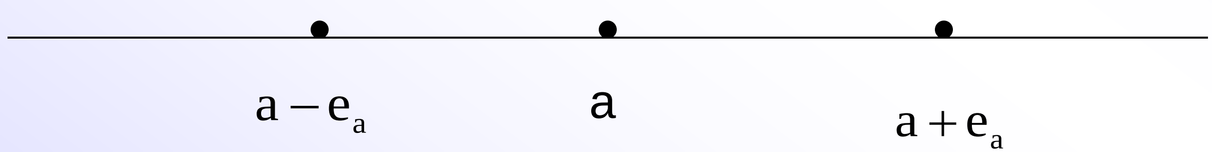
اکنون فرض کنید یک خطای مطلق حدی چون به (a) طریقی به دست آمده باشد.
یعنی،

$$e(a)=|A-a|\le e_a$$

با استفاده از نامساوی اخیر و خواص قدر مطلق داریم:

$$a-e_a\le A\le a+e_a$$

این نامساویها نشان می دهند که A در بازه $[a-e_a\,,a+e_a]$ قرار دارد.



A متعلق به بازه بالاست

طول این بازه $2e_a$ است و هر چه e_a کوچکتر باشد حدود دقیقتری برای A حاصل می شود.

1-۶-۴ قرارداد

هر وقت $|A-a| \le e_a$ می نویسیم:

$$A = a \pm e_a$$

۱-۶-۵ مثال

۱- اگر $l = 2/7 \pm 0/04$ حدود l راتعیین کنید

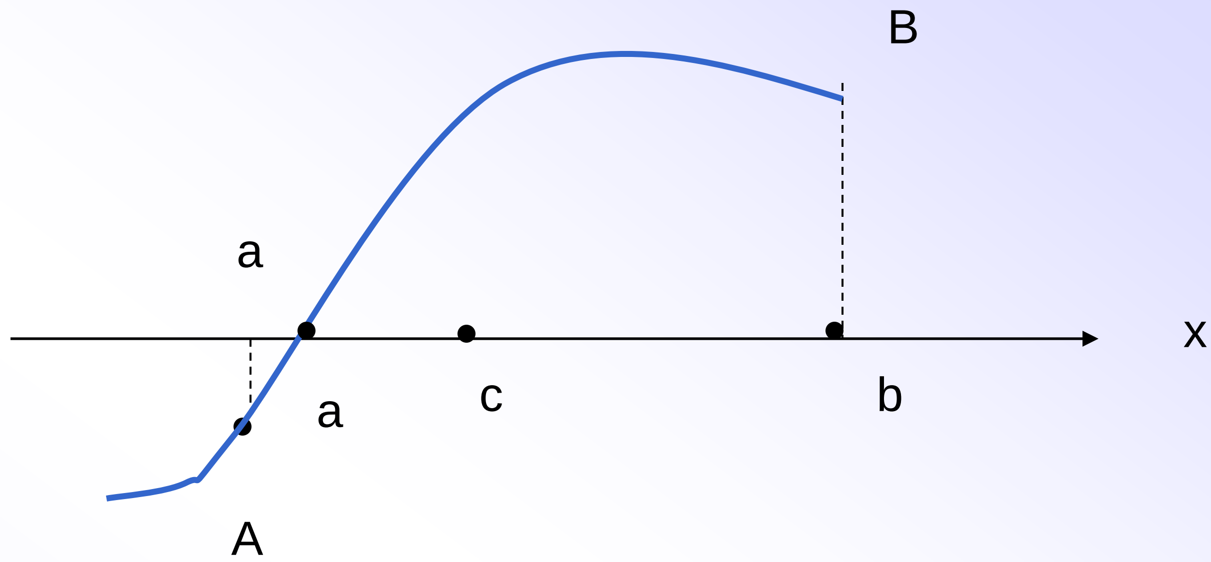
$$2/7 - 0/04 \le l \le 2/7 + 0/04$$

پس

$$2/66 \le l \le 2/74$$

در روشهای عددی عمدتا A مجهول است و یک خطـــــای مطلق حدی برای تقریب a از A قابل محاسبه است . در این مورد، به مثال زیر توجه کنید.

۲- فرض کنید Y= F(x) در بازه (a,b) محور X ها را قطع می کند(شکل ۱-۴) تقریبی از طول نقطه برخورد منحنی با محور X را تعیین کنید و حداکثر خطای آن را به دست آورید.



محل تلاقی منحنی با محور a,x است و c را وسط بازه (a,b) می گیریم، در واقع

$c=\frac{a+b}{2}$. واضح است که c تقریبی از a است به وضوح فاصله a تا c کمتـــــر از نصف

طول بازه (a,b) است.

یعنی،

$$|a-c|\le\frac{b-a}{2}$$

مشاهده می شود که عدد $\frac{b-a}{2}$ یک کران بالا برای خطای c است که به محل a بستگی نداردو به سادگی قابل محاسبه است.

حال این سوال مطرح است که

«آیا خطای مطلق یک تقریب ، دقت آن تقریب را کاملا مشخص می کند؟» مطالب زیر را مطالعه و به سوالات مربوط پاسخ دهید تا جواب سوال بالا مشخص شود.

الف) دو صندوقدار بانک را در نظر بگیرید که یکی با رد و بدل کردن، مثلا، یک میلیون تومان ، صد تومان کم، و دیگری با رد و بدل کردن پانصد هزار تومان ، صد تومان زیاد آورده است! دقت کدام صندوقدار بیشتر بوده است؟

ب) دو ماشین نویس را در نظر بگیرید که یکی در تایپ دو صفحه ده کلمه و دیگری درتایپ ۲۰ صفحه ده کلمه غلط تایپ کرده است. دقت کدام ماشین نویس بیشتر بوده است؟

ج) دو دروازه بان را در نظر بگیرید که یکی از ۵ پنالتی ۴ گل و دیگری از ۱۰ پنالتی ۴ گل خورده است . کدام دروازه بان بهتر بوده است (دقیقتر عمل کرده است)؟

از مثالهای فوق چنین بر می آید که آنچـــــه دقت یک تقریب را معین می کنند خطا در واحد کمیت است که هر چه کوچکتــــــــر باشد تقریب بهتر (دقیقتر) است.

۱-۶-۶ تعریف

اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A باشد خطای نسبی a را با (a) δ نشان می دهیم و آن عبارت است از خطا در واحد کمیت، یعنی،

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{A}$$

همانطور که دیده می شود ، A که معمولامقدار آن معلوم نیست، هم در

صورت و هم در مخرج کسر موجود است، می توان یک کران بالا برای

$\delta(a)$ به دست آورد که A در آن نباشد.

۱-۶-۷ قضیه

اگر a و e_a یک خطای مطلق حدی a باشد داریم

$$\delta(a) \le \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

کسر اخیر را با δ_a نشان می دهیم و آن را خطای نسبی حدی می نامیم.

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد می توان از آن صرفنظر کرد و نوشت:

$$|a| - e_a \cong |a|$$

۱-۶-۹ نتیجه

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد

$$\delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|}$$

(نماد $\lesssim$ به معنی «تقریبا کوچکتر از» است)

با توجه به اینکه در عمل a محاسبه و e_a برآورد می شود کسر $\frac{e_a}{|a|}$ همیشه قابل محاسبه است و به همین دلیل بعضی کتابها $\frac{e_a}{|a|}$ را تقریبـــا مساوی $\delta(a)$ می گیرند. ما نیز از این به بعد چنین می کنیم. یعنـــی، فـــرض می کنیم e_a در مقایسه با $|a|$ قابل اغماض باشد و قرار می دهیم .

$$\delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|}$$

مثال ۱-۶-۹

فرض کنید a= ۴۱/۱ و $A=\sqrt{2}$ خطای نسبی a را حساب کنید.

$$\delta(a)=\frac{\sqrt{2}-1/41}{\sqrt{2}}=\frac{0/004213562}{1/414213562}=0/002979438$$

اما اگر ، با توجه به مثال ۱-۶-۳ قرار دهیم $e_a=0/005$ خواهیم داشت

$$\delta(a)\cong=\frac{0/005}{1/41}=0/003546099291...$$

که تفاوت چندانی با $\delta(a)$ ندارد (اختلاف حدود $0/0006$ است. اگر قرار می دادیم $e_a=0/0043$ مقدار $\frac{e_a}{a}$ چقدر با $\delta(a)$ اختلاف داشت؟

۱-۷ ارقام با معنای درست یک تقریب

هر یک از اعداد زیر یک تقریب از عدد e هستند

۲/۷۱۸۱ و ۲/۷۱۸ و ۲/۷۲ و ۲/۷ و ۳

یکی از راههای تعیین دقت این تقریبها آن است که خطای نسبـــی آنها را حساب کنیم. اکنون این سوال مطرح است که آیا راه دیگری برای تعیین این اعداد وجود دارد؟ مثلا، با استفاده از تعداد ارقام آن یا خصوصیات دیگر؟ بدیهی است که تعداد ارقام با معنای یک تقریب موید دقت آن تقریب نیست. مثـــلا ، عدد ۳/۷۱۸۲۳۸ تقریبی از عدد e است که ۷ رقم با معنا دارد. آیا این عدد تقریب خوبـی از e است؟ آیا ۳ تقریب بهتری نیست؟ پس چگونه می توان با توجه به ارقام یک تقریب به دقت آن پی برد؟ اینجاست که پای مفهوم ارقام با معنای درست به میان مـــی آید. این مفهوم از گرد کردن یک عدد ناشی شده است .

قبل از ارائه تعـــریف دقیق ارقام با معنای درست هر تقریب ، مثالی می آوریم.

۱-۷-۱ مثال

فرض کنید $A=8/000$ و $a=7/997$ و $a'=8/08$ مشاهده می شود که درست a' دو

رقم ، مساوی با ارقام A دارد (با حفـــظ ارزش هر رقم) . امـــا هیچیک از ارقام a

مساوی ارقـــام A نیست . آیا مـــی توان گفت که ارقام درست بیشتر از

ارقـــام a' درست a است؟ خواهیـــم دید که نـــه.

مفهوم ارقام با معنای درست هر تقریب رابطه تنگاتنگ با دقت آن تقریب دارد.

در اینجا

$$e(a)=0/003 \quad , \quad e(a')=0/08$$

و در واقع باید تعداد ارقام درست بیشتری داشته باشد! اما، تعداد ارقام بامعنای درست چگونه به دست می آید؟ به بیان نادقیق به صورت زیر

اگر a را تا سه رقم با معنا گرد کنید عدد A حاصل می شود . از این رو، a سه رقم با معنای درست دارد. اگر a' را تا رقم یکان گرد کنید A حاصل می شود (توجه کنید که حتی گرد شده a' تا یک رقم اعشار، به ۱/۸ منجر می شود که مساوی A نیست). یعنی، a' تنها یک رقم با معنای درست دارد (هر چند که دو رقم آن دقیقا در بسط A ملاحظه می شود)

۱-۷-۲ تعریف

فرض کنید

$$a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots \qquad (a_m \neq 0)$$

بسط اعشاری a و d تعداد ارقام با معنای a باشد در این صورت بزرگترین عدد

صحیح نامنفی n که. $n \le d$

$$|A - a| \le 5 \times 10^{m-n}$$

تعداد ارقام با معنای درست a نامیده می شود

۱-۷-۳ مثال

الف) اگر a= ۱۴/۳ آنگاه $a = 3\times10^{0} + 1\times10^{1} + 4\times10^{2}, m = 0$

ب) اگر $a = 0/0078$ آنگاه $a = 7\times10^{-3} + 8\times10^{-4}, m = -3$

پ) اگر $\alpha = 123/7$ آنگاه $a = 1\times10^{-2} + 2\times10^{1} + 3\times10^{0} + 7\times10^{1}, m = 2$

ت) اگر $a = \frac{1}{3}$ آنگاه $a = 0/0\overset{\circ}{3}$ که در نتیجه m=-2 ،

بطور کلی اگر

$$a = a_m \times 10^{m} + a_{m-1}\times 10^{m-1} + \; > 0 \quad (a_m \neq 0)$$

$$10^{m} \leq a < 10^{m+1}$$

و در نتیجه ، $m \le \log_{10} a < m+1$ که با توجه به تعریف جزء صحیح معلوم

می شود که $m = [\log_{10} a]$ بعبارت دیگر m مساوی مفسر لگاریتم a در مبنای ده است.

از این رو، اگر $a \ge 1$ آنگاه

$m = [a]$ (تعداد ارقام)-1

و اگر $0 < a < 1$ آنگاه

$+1$ {(تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز در بسط a)} $m = -$ (یا m قرینه تعداد صفرهای قبل و بلافاصله بعد از ممیز در بسط اعشـــاری a است.) به این ترتیب بدون نوشتن بسط اعداد نیز می توان مقدار m مربـــــوط به آنها را بدست آورد. کافی است معین کنیم a کوچکتـــر از یک است یا بزرگتـــر یا مساوی ۱ و طبق آنچه در بالا گفته شد عمل کنیم.

۱-۷-۴ مثال:

۱- در بسط اعشاری $e^{\frac{1}{3}}$ مقدار m را حساب کنید.

با توجه به اینکه $0<\frac{1}{3}<1$ داریم $e^0<e^{\frac{1}{3}}<e^1$

پس، $1<e^{\frac{1}{3}}<e<3$ از این رو، قسمت صحیح $e^{\frac{1}{3}}$ یک رقمی است (یا یک است یا دو).

بنابراین m=0

۲- اگر A=8/00 ، a=7/997 ، $a' = 8/08$ تعداد ارقام با معنای درست a و a' را حساب کنید.

با توجه به اینکه جزء صحیح a و a' اعداد یک رقمی هستند، m برای هر دو صفر است. و داریم:

$$e(a) = 0/003$$

حال باید بزرگترین n را به دست آوریم که در نامساوی زیر صدق کند

$$0/003 \leq 5 \times 10^{0-n}$$

بدیهی است که بزرگترین n برابر ۳ است. یعنی، a دارای ۳ رقم با معنای درست است.برای a' نیز داریم

$$e(a') = 0/008 < 0/5 = 5 \times 10^{0-1}$$

یعنی a' تنها یک رقم با معنای درست دارد.

۳- اگر $A=100$، $a=99/98$ ، $b=100/6$ تعداد ارقام با معنای درست a و b را حساب کنید.

در مورد a داریم $m=1$ و

حال باید بزرگترین n را چنان تعیین کنیم که $e(a)=0/02$

$0/02 < 5\times10^{1-n}$

بدیهی است که $n=3$ جواب است . یعنی ، a دارای سه رقم با معنای درست است.

در مورد b داریم $m=2$ و باید $e(b)=0/6 < 5\times10^{2-n}$ که $n=2$ جـــــواب است

یعنی، b تنها دو رقم با معنای درست دارد.

در زیر طی چند قضیـــه و مثال ارتباط بین ارقام با معنای درست یک تقریب و دقت آن را، که با خطای نسبـــی محک زده می شود، بررسی می کنیم.

۱-۷-۵ قضیه

اگر a تقریبی از A با n رقم با معنای درست باشد $b = 10^k \times a$ و $B = 10^k \times A$

،که در آن k عددی صحیح است، آنگاه b نیز تقریبی از B با n رقم با معنای درست است و خطای نسبی a و b یکسان هستند.

۱-۷-۶ قضیه

اگر a گرد شده عدد مثبت A تا n رقم با معنا باشد a دارای n رقـــم با معنای درست است.

۱-۷-۷ قضیه

اگر $a > 0$ تقریبی از A و دارای n رقم درست باشدخطای نسبی a از 5×10^{-3} کمتر است ، به شرط آنکه رقمهای درست a شامل یک رقم یک و n-1 صفر درسمت راست آن نباشد.

مثال ۱-۷-۸

تقریبی از π ارائه دهید که خطای نسبی آ ن از 10^{-3} کمتر باشد.

یکی از راههای تعیین این تقریب آن است که عدد π را تا یک رقم، دو رقم، ... اعشار گرد و خطای نسبی هر یک را محاسبه کنیم، تا زمانی که از 10^{-3} کمتر شود ! بعبارت دیگر ، مقدار کسرهای زیر را حساب کنیم تا به عددی کوچکتر از 10^{-3} برسیم.

$$\frac{\pi-3/1}{\pi}, \frac{\pi-3/14}{\pi}, \frac{\pi-3/14}{\pi}, \ldots$$

اما، با استفاده از قضیه ۱-۷-۷ به راحتی می توان جواب را به دست آورد. با توجه به نامساوی

$$5\times10^{-4} < 10^{-3}$$

اگر a چنان تقریبی از π باشد که ۴ رقم با معنای درست داشـــته باشد بنابر قضیه ۱-۷-۷

$$\delta(a) < 5\times10^{-4}$$

و بنابراین $\delta(a)<10^{-3}$ از این رو ، با توجه به قضیه ۱-۷-۶ کافی است a را گرد شده تا ۴ رقم با معنا اختیار کنیم. یعنی، a=3/142 تقریب مورد نظـــر است.

قضیه ۱-۷-۹

اگر $a>0$ تقریبی باشد بطوری که $\delta(a)\le 0/5\times10^{-n}$ آنگاه a حداقل n رقم با معنای درست دارد.

با توجه به این که خطای نسبی یک تقریب دقت آن تقـــریب را نشان می دهد قضایای ۱-۷-۷ و ۱-۷-۹ به خوبی ارتباط بین دقت یک تقریب را با تعـداد ارقام درست آن نشان می دهند. در بعضی مسائل خطای نسبی تقریب را می تـــوان به دست آورد (مثلا، در حل دستگاه معادلات خطی به روشهای عددی) که درنتیجه با استفاده از قضیه ۱-۷-۹ می توان حداقل ارقام بامعنای درست تقریب به دست آمده را تعیین کرد.

در برخی دیگر از مسائل می توان تعداد ارقام با معنای درست یــــــک تقریب را بدست آورد، مثلا، در روش نیوتن برای تعیین تقـــریبی از یک ریشـــــه معادله $f(x)=0$ که با توجه به قضیه ۱-۷-۷ می توان خطای نسبی و در نتیجـه دقت تقریب آن را معین کرد.

۸-۱ تولید وانتشار خطا

همانطور که می دانید صورت علمی نمایش هر عدد اعشاری مخالف صفر

$$a \times 10^b$$

است که در آن،

$$1 \le |a| < 10$$

این نمایش را نمایش ممیز سیار نیز می نامند (با تغییر نما، ممیز در بین ارقام a تغییر محل می دهد). محاسبه با این اعداد را نیز حساب ممیز سیـــار می نامند. قبل از این که نحوه تولید و انتشــــــار خطا را توضیــــح دهیم لازم است درمورد چگونگی انجام چهـــار عمل اصلـــــی روی اعداد ممیز سیار مطالبی را بیان کنیم.

برای سادگی بحث فرض کنید فقط سه رقـــــم با معنا از ارقام مانتیس هر عدد اعشاری ، یعنی a، را می توانیم نگه داریم؛ این را حساب ممیـــــز سیار سه رقمی نامند.

۱-۸-۱ حساب ممیز سیار

در اینجا اعمال اصلی بر اعداد ممیز سیار را بررسی می کنیم.

الف) جمع و تفریق

برای بدست آوردن حاصل جمع یا تفاضل دو عدد ابتدا نماها یکسان می شوند ، در صورت لزوم با افزایش نمای عدد کوچکتر، سپس حاصل عمل بدست می آید و سرانجام جواب حاصل بصورت علمی ، با مانتیسی که ۳ رقم با معنا دارد ، نوشته می شود.

مثلا

$$3/12\times10^{1}+8/34\times10^{1}=11/46\times10^{1}=1/146\times10^{2}\rightarrow1/15\times10^{2}$$

$$6/48\times10^{1}+1/45\times10^{-1}=6/48\times10^{-1}+0/0145\times10^{1}=6/4945\times10^{1}\rightarrow6/49\times10^{1}$$

$$3/56\times10^{-1} - 2/67\times10^{-1} = 0/89\times10^{-1} \rightarrow 8/9\times10^{-2}$$

$$1/49\times10^{+1} - 1/2\times10^{-1} = 1/49\times10^{-1} - 0/012\times10^{1} = 1/478\times10^{1} \rightarrow 1/48\times10^{1}$$

ب) ضرب

در ضرب دو عدد ممیز سیار، نماها با هم جمع و مانتیسها در هم ضرب می شوند. سپس نتیجه نهایی ، با گرد کردن، بصورت علمی نمایش داده می شود. مثلا،

$$\left[3/25\times10^{1}\right]\times\left[2/46\times10^{1}\right] = 7/995\times10^{2} \rightarrow 8/00\times10^{2}$$

$$\left[7/48\times10^{3}\right]\times\left[3/37\times10^{-2}\right] = 25/2076\times10^{1} = 2/52076\times10^{2} \rightarrow 2/52\times10^{2}$$

ج) تقسیم

برای تقسیم دو عدد ممیز سیار، ابتدا تفاضل به دست می آید، سپس مانتیسها بر هم تقسیم شده و حاصل بصورت علمی نمایش داده می شود. مثلا،

$$\frac{5/43\times10^{1}}{4/55\times10^{2}}=1/1934...\times10^{-1}\rightarrow1/19\times10^{1}$$

$$\frac{2/75\times10^{1}}{9/87\times10^{3}}=\circ/278622...\times10^{-2}=2/78622...\times10^{-3}\rightarrow2/79\times10^{-3}$$

مشاهده می شود که حتی اگر عوامل یک عمل دقیق باشند، نتیجه، معمولا، گرد شده حاصل دقیق است، خطایی که به این ترتیب وارد می شود خطای تولید شده نام دارد.

د) محاسبه عبارات

ممکن است در یک عبارت محاسباتی چهار عمل اصلی شرکت داشته باشند. در این صورت، عملیات همانند آنچه توضیح داده شدانجام می شود تا حاصل نهایی بدست آید .

$$\frac{6/18\times10^{1}+1/84\times10^{-1}}{\left(4/72\times10^{1}\right)\left(6/38\times10^{1}\right)}\rightarrow\frac{6/20\times10^{1}}{3/01\times10^{3}}=2/0598...\times10^{-2}\rightarrow2/06\times10^{-2}$$

در مثال بالا، مقادیر صورت و مخرج کسر دوم شامل خطاهای تولید شده هستند. این اعداد تقریبی نیز بر هم تقسیم می شوند و نتیجه نهایی باز هم شامل خطای تولید شده دیگری است. بدیهی است که خطاهای تولید شده در صورت و مخرج کسر دوم انتشار پیدا می کنند و روی مقدار جواب نهایی اثر می گذارند.

۱-۲-۸ تفاوتهای حساب ممیز سیار با حساب معمولی

در حساب ممیز سیار، با هر تعداد رقم که بتوان نگهداشت ، قوانین حساب معمولی نظیر وجود عضو بی اثر برای جمع ، شرکت پذیری ضرب یا جمع و ... عموما بر قرار نیستند. این موارد در مثالهای زیر بررسی می شود.

الف) در حساب ممیز سیار، مثلا، سه رقمی،هر عدد کوچکتر از 5×10^{-3} ر که با عدد ۷۵/۲ خواهد بود، بعنوان مثال،

$$2/75+4\times10^{-3}=2/75\times10^{0}+0/004\times10^{0}=2/754\times10^{0}\rightarrow 2/75$$

بنابراین ، در جمع اعداد ممیز سیار عضو بی اثر منحصر به فرد نیست.

$$2/75+4\times10^{-3}+3\times10^{-3}$$

ب) شرکت پذیری عمل جمع در اعداد ممیز سیار برقرار نیست. مثلا در محاسبه

داریم:

$$2/75+4\times10^{-3}=2/754\rightarrow 2/75$$

$$2/75+4\times10^{-3}=2/754\rightarrow 2/75$$

$$2/75+4\times10^{-3}=2/753\rightarrow 2/75$$

بنابراین:

$$\left(2/75+4\times10^{-3}\right)+4\times10^{-3}\rightarrow 2/750$$

اما،

$$4\times10^{-3}+4\times10^{-3}=7\times10^{-3}$$

و

$$2/75+7\times10^{-3}=2/75\rightarrow 2/76$$

یعنی ، در حساب ممیز سیار سه رقمی، حاصل عبارات یکسان نیست.

$$\left(2/75+4\times10^{-3}\right)+3\times10^{-3},2/75+\left(4\times10^{-3}+3\times10^{-3}\right)$$

۱-۸-۳ انتشار خطا

به ترتیب ،تقریبهایی از آنها باشند و نماد b و a دو عدد و B و Aدر حالت کلی اگر

یک $\otimes$ عمل باشد،

در وسایل محاسباتی این عمل با نماد $\otimes^*$ تقریب می شود و در واقع آنچه

این وسایل به ما می دهند $a \otimes^* b$ است و داریم:

$$\left|A \otimes B - a \otimes^* b\right| = \left|(A \otimes B - a \otimes b) + (a \otimes b - a \otimes^* b)\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|(A \otimes B - a \otimes b)\right|}_{\text{خطای منتشر شده}} + \underbrace{\left|a \otimes b - a \otimes^* b\right|}_{\text{خطای تولید شده}}$$

بنابراین، خطای کل از مجموع خطای منتشر شده و خطای تولید شده بیشتر نیست. در آنچه خواهد آمد حداکثر خطای منتشر شده را برای چهـــــار عمل اصلی به جای محاسبه می کنیم.⊗معمولا در عمل به خطای تولید شده توجه زیادی نمی شود هر چند گاهی اوقات باعث بدست آمدن جوابهای غیر قابل قبول می شود.

در ادامه جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد تقریبی را بررسی می کنیم.

الف) جمع اعداد تقریبی

در حساب ممیز سیار ۳ رقمی داریم

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\cong 1/41+1/73=3/14$$

مشاهده می شود که تقریبی از $\sqrt{2}$ با تقریبی از $\sqrt{3}$ جمع شده است. اکنون می خواهیم معین کنیم که خطای ۱۴/۳ حداکثر چقدر است و چه ارتباطی با خطاهای ۴۱/۱ و ۷۳/۱ دارد. در حالت کلی داریم

۱-۸-۴ قضیه

و این اعداد جملگی مثبت باشند آنگاه B و A تقریبهایی از b و a اگر

$$e(a+b)<e(a)+e(b)$$

$$\delta(a+b)\leq \max\{\delta(a),\delta(b)\}$$

۱-۸-۵ نتیجه

حداکثر خطای a+b مجموع خطاهای aو b است و دقت a+b می تواند همانند نادقیقترین a و b باشد. از این رو، در اندازه گیری کمیتهایی که می خواهیم جمع کنیم ، بهتر است آنها را با یک واحد اندازه گیری کنیم.

ب) تفریق اعداد تقریبی

در مورد تفریق اعداد تقریبی به راحتی می توان نشان داد که

$$e(a-b)\le e(a)+e(b)$$

اما، بنا بر تعریف $\delta(a-b)\cong\frac{e(a-b)}{|a-b|}$ و اگر $|a-b|$

کوچک باشد خطای نسبی a-b می تواند بزرگ باشد ، که نتیجه a-b نادقیق خواهد بود.

۱-۸-۶ مثال:

اگر A و B نزدیک به هم باشند و هدف محاسبه $\frac{1}{A-B}$، با استفاده از حساب ممیز سیار،

باشد خطا می تواند فاحش باشد. مثلا، با حساب ممیز سیار چهار رقمی:

$$C=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\pi}\cong\frac{1}{\left(1/414+1/732\right)-3/142}$$

$$=\frac{1}{0/004}=250$$

در صورتی که ، اگر به جای اعداد موجود در کسر C تقریبهایی تا ۹ رقم اعشار قراردهیم و

جواب را تا چهار رقم گرد کنیم خواهیم داشت

$$C=214/1 \quad (4s)$$

۱-۹ خطای محاسبه توابع

مشاهده کرده اید که اکثر ماشین حسابهای مورد استفاده دارای کلیدهای تابعی هستند .
با زدن یک عدد و بعد فشار یک یا دو کلید ، می توانید مقدار توابعی چون،

$$\cos x \ , \ \sin x \ , \ e^{x} \ , \ \operatorname{arctg} x \ , \ \arccos x \ , \ \arcsin x \ , \ \ln x \ , \ \log_{10} x \ , \ \operatorname{tg} x$$

و بعضا توابع هیپربولیک را حساب قبل از اینکه ماشین حساب و کامپیوتر رایج شود معمولا مقادیر این توابع، آن هم در نقاط، از روی جدول تعیین می شد . (هنوز هم در آخر بعضی از کتابهای دبیرستان جداول و خطوط مثلثاتی وجود دارد). در این بخش می خواهیم نحوه محاسباتی تقریبی از یک تابع را شرح دهیم و خطای آن را حساب کنیم .
قبلا به یک مثال توجه کنید.

۱-۹-۱ مثال

تقریبی از $e^{\frac{2}{3}}$ را با خطای کمتر از 10^{-2} حساب کنید

حل:

ابتدا توضیح می دهیم که منظور از $e^{\frac{2}{3}}$ چیست. می دانیم که بسط ماکلورن تابع e^{x} چنین است:

$$e^{x}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots+\frac{x^{n}}{n!}+\dots$$

منظور از e^{x} مقدار سری زیر است

$$1+\frac{2}{3}+\frac{\left[\frac{2}{3}\right]^{2}}{2!}+\frac{\left[\frac{2}{3}\right]^{3}}{3!}+\dots+\frac{\left[\frac{2}{3}\right]^{n}}{n!}+\dots$$

اما محاسبه تمام جملات سری بالا و بعد جمع کردن آنها عملا ممکن نیست. ضمنا در ماشین حساب یا کامپیوتر نمی توان عدد $\frac{2}{3}$ را دقیقا ذخیره کرد .

از این رو، در عمل تقریبی اعشاری از $\frac{2}{3}$ اختیار می کنیم و تعدادی از جملات ابتدای سری (۲۱,۱) را محاسبه و با هم جمع می کنیم. مثلا، برای دقت $\varepsilon = 10^{-2}$ قرار می دهیم:

$$\bar{x} = 0/667$$

و جملات سری (۲۱,۱) را تا جایی حساب می کنیم که مقدار آنها از نصف ε یعنی $0/005$ کمتر نباشد (البته مقادیر حساب شده را نیز تا سه رقم اعشار گرد می کنیم).

$$e^{\frac{2}{3}} \cong 1+0/667+0/222+0/049+0/008+0/001$$

بنابراین،

$$\mathbf{e}^{\frac{2}{3}} \cong \mathbf{1/947}$$

اگر $e^{\frac{2}{3}}$ را از ماشین حساب بگیرید خواهید داشت:

$$e^{\frac{2}{3}} = 1/94773404...$$

که از آن نتیجه می شود

$$\left| e^{\frac{2}{3}} - 1/947 \right| = 0/00073404... < 0/01$$

وجیه عملیات بالا را در زیر مشاهده می کنید.

۱-۹-۲ بسط ماکلورن یک تابع

اگر تابع F در مجاورت صفر تعریف شده باشد و مشتقات آن ، از هر مرتبه ، موجود باشد داریم:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

برای بدست آوردن بسط ماکلورن یک تابع باید مشتقات آن را در صفـــر حساب کنیم و درحیطه (۲۲,۱) قرار دهیم. بسط ماکلورن چند تابع ، جهت اطلاع و بکار بردن آنهـــا در تمرینهای آخر ایـــن بخش ، در زیـــر آمده است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\log_e(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{8} + - \dots$$

را اختیار f مشاهده می شود که هر تعداد متناهی از جملات ابتدای بسط ماکلورن تابع کنیم چند جمله ای بدست می آید. پس می توان نوشت

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$$

که در آن،

$$p_n(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\dots\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)+\dots$$

$R_n(x)$ را باقیمانده سری مساوی f(x) می نامند. در صورتی که به ازای هر x از دامنه f داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ می توان روشی عملی برای محاسبه تقریبی از f(x) به ازای هر نقطه از دامنه اش ارائه کرد.

برای محاسبه تقریبی از $F(X)$ با خطای مطلق کمتر از ε داده شده، ابتدا تقریبی از X چون $\bar{x}$ انتخاب می کنیم که $\bar{x}$ کوچک باشد و بعد به جای محاسبه $P_n(\bar{x})$ مقدار $P_n(x)$ را حساب می کنیم. این خطا یی تولید می کند که به طریق زیر قابل محاسبه است (البته بطور تقریبی).

با استفاده از بسط تیلر تابع $P(x)$ حول نقطه $\bar{x}$، تا مشتق مرتبه دوم، داریم:

$$P_n(x) = P_n(\bar{x}) + (x-\bar{x})P_n'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})}{2!}P_n''(\eta), \quad (\eta \text{ بین } X \text{ و } \bar{x})$$

در عمل ε کوچک است و $\bar{x}$ را گرد شده X به گونه ای می گیریم که $|x-\bar{x}|$ خیلی از ε کوچکتر باشد. مثلا $|x-\bar{x}| < \frac{\varepsilon}{20}$.

بنابراین با توجه به اینکه $(x-\bar{x})^2$ بسیار کوچک است، می توان نوشت:

$$P_n(x) \cong P_n(\bar{x}) + (x-\bar{x})\,P'n(\bar{x})$$

که از آن نتیجه می شود

$$f(x) \cong P_n(\bar{x}) + (x-\bar{x})P'_n(\bar{x}) + R_n(x). \qquad (۲۴,۱)$$

آنچه ماشین حساب یا کامپیوتر به ما می دهد $P_n(\bar{x})$ است. بنابراین n و $\bar{x}$

چنان انتخاب می شوند که $\left|f(x) - P_n(\bar{x})\right| < \varepsilon$

برای این منظور می گوییم از (۲۴,۱) به دست می آید.

$$\left|f(x) - P_n(\bar{x})\right| \le \left|(x-\bar{x})P'_n(\bar{x}) + R_n(x)\right|$$
$$\le \left|x-\bar{x}\right|\left|p_n(\bar{x})\right| + \left|R_n(x)\right|$$

از این رو کافی است نامساویهای زیر برقرار باشند

$$\begin{cases} \left|R_n(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \left|\left(x-\overline{x}\right) \quad P_n'\left(\overline{x}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \qquad (۲۵,۱)$$

نامساوی اول ، با فرض (۲۳,۱) ، از مرتبه ای به بعد برقرار است ولی نامساوی دوم

بستگی به مقدار نامشخص $P_n'\left(\overline{x}\right)$ دارد. در عمل با اعمال محدودیتهایی روی $\overline{x}$

و x می توان نامساوی دوم را نیز برقرار کرد. بنابراین، فرض می شود

$$|x| \leq 1$$

برای توابع مثلثاتی

$$|x| \leq \frac{\pi}{2}$$

محدودیتها بزرگ نبودن $P_n'(\bar{x})$، با توجه به چند جمله ای بودن آن و این که ضرایب این چند حمله ای اعداد کوچک هستند، تضمین می کند. در وســـایل محاسباتی $\bar{x}$ گرد شده تا $\bar{x}$ آخرین رقمی است که ماشین قادر به ذخیره است.

ولی برای محاسبه دستی اگر $\varepsilon \le 10^{-k}$ کافی است $\bar{x}$ گرد شده x تا (k+۱) رقم اعشار

اختیار کنید. در این صورت بنابر(۱۳,۱) :

$$\left|x-\bar{x}\right| \le 5\times 10^{-(k+2)} = \frac{\varepsilon}{20}$$

برای اکثر توابع، با این انتخاب نامساوی دوم (۲۵,۱) نیز برقرار خواهد بود.البته لازم به ذکر است که در حالت کلی نباید ابتدا n را چنان بدست آورد که نامساوی اول (۲۵,۱) برقرار شد بلکه ، همانطور که در مثال (۱-۹-۱) گفته شد، جملات را تا جایی حساب می کنیم که در مطلق آخرین جمله از $\varepsilon/2$ کمتر باشد.

۱-۹-۳ مثال

تقریبی از sinx را به ازای $x=\frac{\pi}{11}$ با خطای کمتر از 10^{-4} حساب کنید.

حل:

قرار می دهیم: $\bar{x}=0/28560$ ($\bar{x}$ گرد شده x تا پنج رقم اعشار است) . و جملات

سری مربوط به sinx را تا جایی حساب می کنیم که قدرمطلق جمله آخر از

کمتر باشد. $\frac{10^{-4}}{2}=0/00005$

$$\sin\frac{\pi}{11}\cong 0/28560-0/00388+0/00002$$

مشاهده کنید که جملات نیز تا پنج رقم اعشار ، یعنی تعداد ارقام اعشار ، گرد شده اند بنابراین، $\sin\frac{\pi}{11}$ را از ماشین حساب بگیرید دارید:

$$\sin\frac{\pi}{11} = \circ/28174(5s)$$

قدر مطلق خطای مقدار محاسبه شده حدود 0/000007 است که از 10^{-4} کمتر است.

$$\sin\frac{\pi}{11} = \circ/28173255...$$

فصل دوم

حل معادلات غیر خطی

مقدمه

حل بسیاری از مسائل اجتماعی ، اقتصادی و علمی منجر به حل معادله ای به شکل (۱ . ۲

) $f(x)=0$ می شود .

منظور از حل معادله (۲ . ۱) تعیین عدد یا اعدادی است که مقدار تابع به ازای

آنها صفر شود . اگر $f(a)=0$ آنگاه a را یک ریشه معادله (۲ . ۱) می نامند یا می گویند

a یک صفر تابع f است . معادله (۲ . ۱) بر حسب نوع تابع f به چند

دسته تقسیم می شود .

الف) تابع f یک چند جمله ای مانند $P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

هدفهای کلی

۱) شناخت منابع خطاوتشخیص آنها در هر مسئله

۲) بررسی منابع خطاو راه های کمینه سازی آنها

۳) شناخت انواع خطاها ورابطه آنها با دقت یک تقریب

۴) جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی

۵) شناخت روش های محاسبه پایدار وناپایدار

۶) محاسبه مقدار تقریبی توابع.

هدف های کلی

۱- ارائه نمونه هایی از مسائل کاربردی – اجتماعی که حل آنها منجر به حل یک معادله متعالی می شود .

۲- بررسی روشهای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله .

۳- بررسی روش های زیر برای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله .

الف) روش دوبخشی (یا تنصیف)

ب) روش نابه جایی

ج) روش نیوتن

ه) روش وتری (خط قاطع)

۴- بحث در واگرایی ، همگرایی و سرعت همگرایی روشها و بالاخره مقایسهٔ روشها .

۵ـ حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی دو مجهولی به دو روش تعمیم یافتهٔ نیوتن .

هدف های رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱- تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله را با روش مناسب تعیین کند .

۲- تقریبی از مقدار یک ریشه را با دقت وطلئب و به روش خواسته شده حساب کند .

۳- تقریبی از تمام ریشه های حقیقی یک معادله را با روش(های) مناسب محاسبه کند .

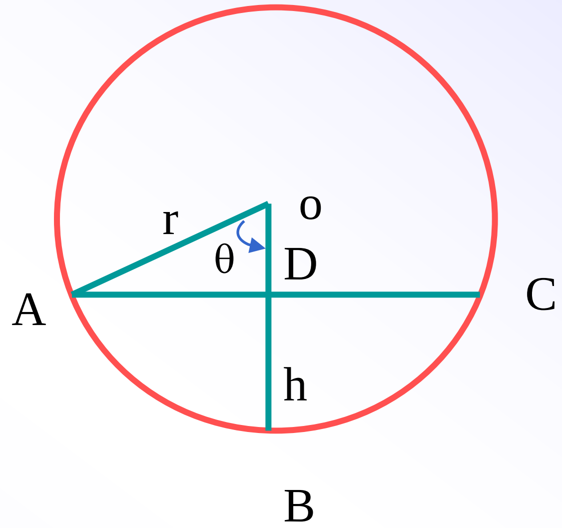
۴- اختلاف روشها را از نظر مطمئن بودن یا نبودن همگرایی و تعداد عملیات برای رسیدن به یک تقریب مناسب را بیان کند .

۵- تعداد و حدود ریشه های یک دستگاه ساده از معادلات دو مجهولی غیر خطی را تعیین و تقریبی از آنها را با دقت مطلوب حساب کند .

۲ـ حل معادلات متعالی

۲ـ۱ یک مسئله کاربردی

در این قسمت مسئله ای را بررسی می کنیم که حل آن منجر به تعیـــــین ریشه ای از یک معادله متعالی می شود . فرض کنید یک مخزن اســـتوانه ای به شعاع قاعدهٔ r داریم که $\frac{1}{4}$ آن پر از مایع است . (مثلا ، مخزن گازوئیل که در اکثر منازل شوفاژدار موجود است .) و این مخزن طـــوری قرار دارد که محور آن افقی است . می خواهیم ارتفاع مایع را در این مخزن بیابیـــــــم (شکل ۲-۱) . فرض کنید ارتفاع مایع h باشد یعنی ، DB=h . طبق فـــرض مسئله ، باید مساحت قطعهٔ ABC مساوی $\frac{1}{4}$ مساحت دایره باشـــد ، اما ، مساحت قطعهٔABC دو برابر مساحت قطعهٔ ADB است .



مقطع عرضی مخزن استوانه ای

از این رو ، به تعیین مساحت قطعـــه ABD می پردازیم . مساحـــــت قطعه ABD

مساوی مســــاحت قطاع OAB منهــای مساحت مثلث OAD است .

در مثلث OAD داریم:

$$AD = r\sin\theta \qquad , \qquad OD = r\cos\theta$$

بنابراین

$$\text{OAD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(r\sin\theta \times r\cos\theta) = \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$$

همچنین مساحت قطاع OAB برابر است با $\frac{1}{2}r^2\theta$ که در آن θ زاویه مرکزی رو به روی کمان AB (بر حسب رادیان) است . پس بایـد داشته باشیم:

$$2\left[\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta\right] = \frac{1}{4}\pi r^2$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $\frac{2}{r^2}$ نتیجه می شود

$$2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{\pi}{2}$$

و یا با توجه به اینکه

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+\sin 2\theta = 0 \qquad (۱)$$

با فرض

$$x = \frac{\pi}{2}-2\theta \qquad (۲)$$

داریم

$$2\theta = \frac{\pi}{2}-x$$

و از آنجا

$$\sin 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

در نتیجه معادله (۱) با توجه به (۲) ، به شکل زیر در می آید که یک معادله متعالی است

.

$$x + \cos x = 0 \qquad (۱)$$

پس از حل مساله متعالی (۱) می توان h، را با توجه به شکل مقطع عرضی مخزن استوانه ، از روابط زیر به دست آورد :

$$h = OB - OD = r - r\cos\theta$$

$$= r\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

با استفاده از مساله بالا می توان یک مخزن را درجه بندی کرد و بر حسب ارتفاع مایع داخل آن به مقدار مایع پی برد . معادله (۱) در طول این فصل به روشهای گوناگون حل خواهد شد.

۲ـ۲ تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه ها

معمولا برای تعیین ریشه ای از یک معادله ، با دقت مطلوب ، لازم است که تقریبی از آن ریشه یا بازهٔ کوچکی که حاوی آن ریشه باشد را معلوم کرد .

در این بخش روشهای موجود برای تعیین تعداد و حدود تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله را مورد بررسی قرار می دهیم . دو روش برای این کار موجود است :

الف) رسم منحنی   ب) جدول بندی مقادیر تابع

در بخش بعد دو روش را شرح می دهیم و نقاط قوت و ضعف هر یک را بیان می کنیم .

۲ـ۲ـ۱ رسم منحنی

در این روش منحنی

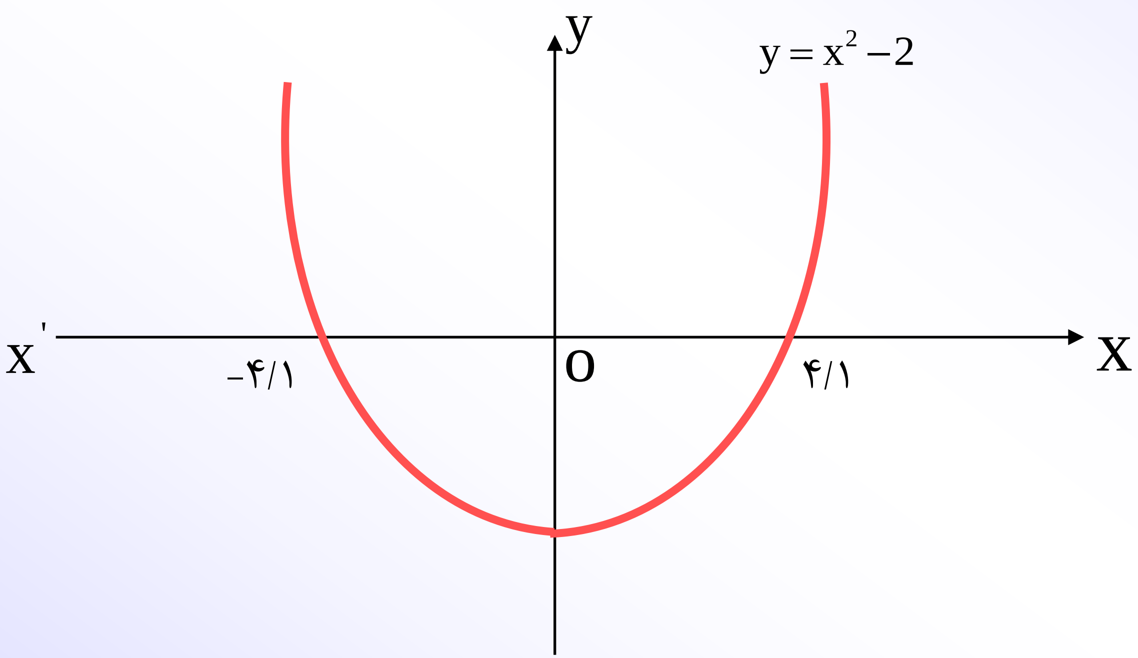
$$y=f(x)$$

را رسم می کنیم . اگر α ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ باشد داریم $f(\alpha)=0$ یعنی ، نقطهٔ $A(\alpha,0)$ روی منحنی $y=f(x)$ قراردارد . اما ، نقطهٔ A روی محو $x\acute{o}ox$ است . پس ، باید نقاط تلاقی منحنی بالا را با محور $x\acute{o}ox$ تعیین کنیم . طول این نقاط ریشه های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند . در حالت کلی رسم منحنی $y=f(x)$، بدون استفاده از ماشین حساب و به کمک نقطه یابی ، به سادگی امکان پذیر نیست و باید ازکامپیوتر و بسته های نرم افزاری مناسب نظیر DERIVE ، MATLAB یاMATHEMATICAL، استفاده کرد . با وجود این ، دانستن روشهای دستی نیز خالی از فایده نیست و اکثر اوقات رفع نیاز می کنند .

۲ـ۲ـ۲ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادلهٔ $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را تعیین کنید .

منحنی $y = x^2 - 2$ را رسم می کنیم . مشاهده می شود که معادله دو ریشه دارد که تقریبا ۴/۱- و ۴/۱ هستند (شکل ۲ـ۲) .



شکل ۲ـ۲

آیا رسم منحنی $y=f(x)$ همیشه به این سادگی است ؟ واضح است که نه .

مثلا ، منحنی

$$y= x + \cos x$$

را به این سادگی نمی توان رسم کرد .

بعضی اوقات می توان $f(x)$ را به صورت تفاضل دو تابع ، که رسم آنها ساده است ، نوشت . فرض کنید داریم

$$f(x) = f_1(x) - f_2(X) \qquad (۵ . ۲)$$

منحنی های زیر را رسم می کنیم

$$y_1 = f_1(x)$$
$$y_2 = f_2(x)$$

حال می گوییم اگر $f(\alpha)=0$ آنگاه

$$f_1(\alpha)-f_2(\alpha)=0$$

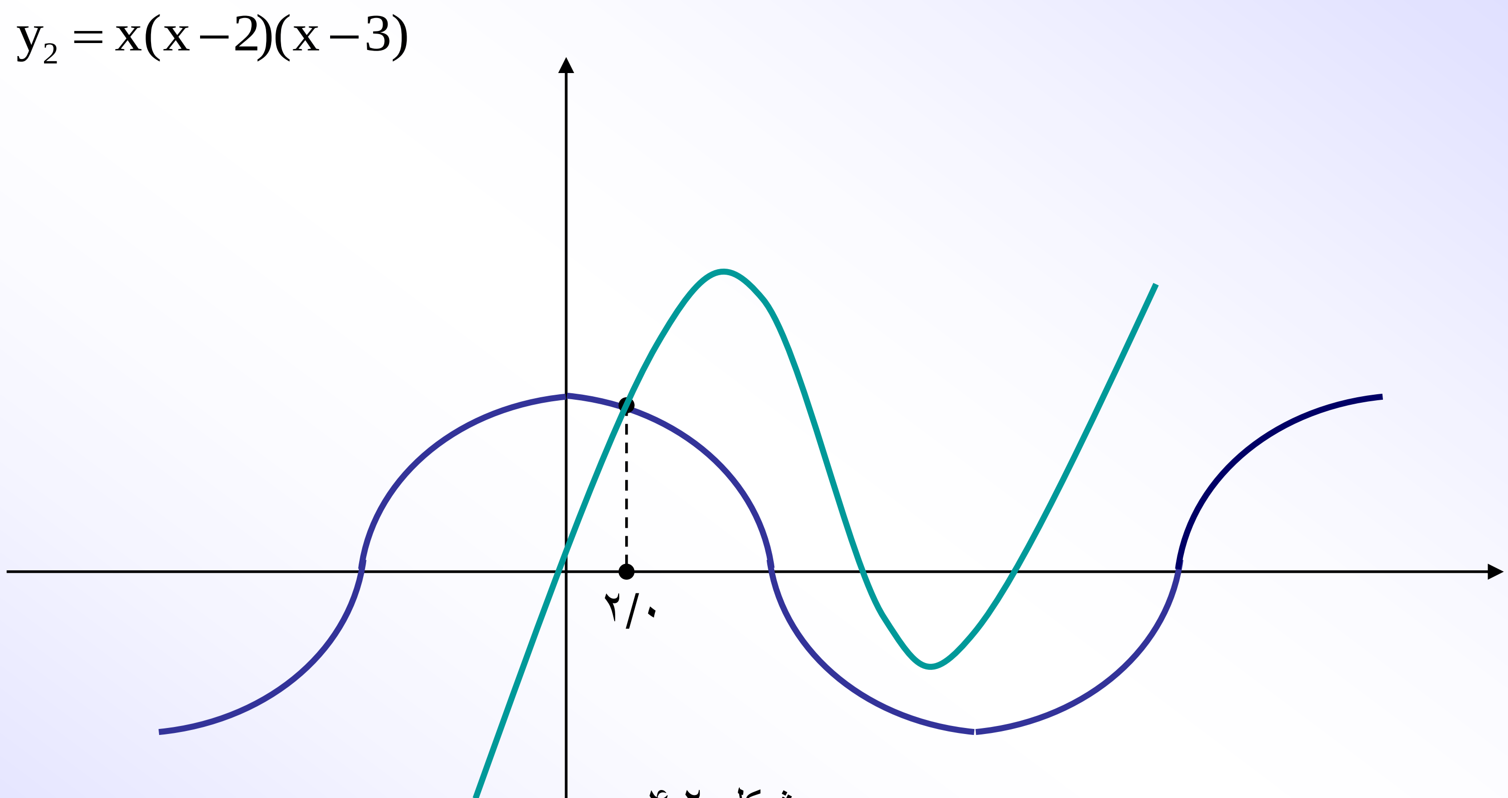
که از آن نتیجه می شود

$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=\beta$$

یعنی نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ روی هر دو منحنی y_1 و y_2 قرار دارد . به عبارت دیگر ، α

طول نقطهٔ تقاطع منحنی های y_1 و y_2 است . از این رو ، منحنی ها را رسم

می کنیم و طول نقاط برخورد آنها را به دست می آوریم .



شکل ۲ـ۴

شکل (۲ـ۴) نشان می دهد که معادله یک ریشه دارد که مقدار تقریبی آن ۲/۰

است . اما ، این تدبیر همیشه کارگر نیست . به مثال زیر توجه کنید .

۲ـ۲ـ۵ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادلهٔ زیر را تعیین کنید .

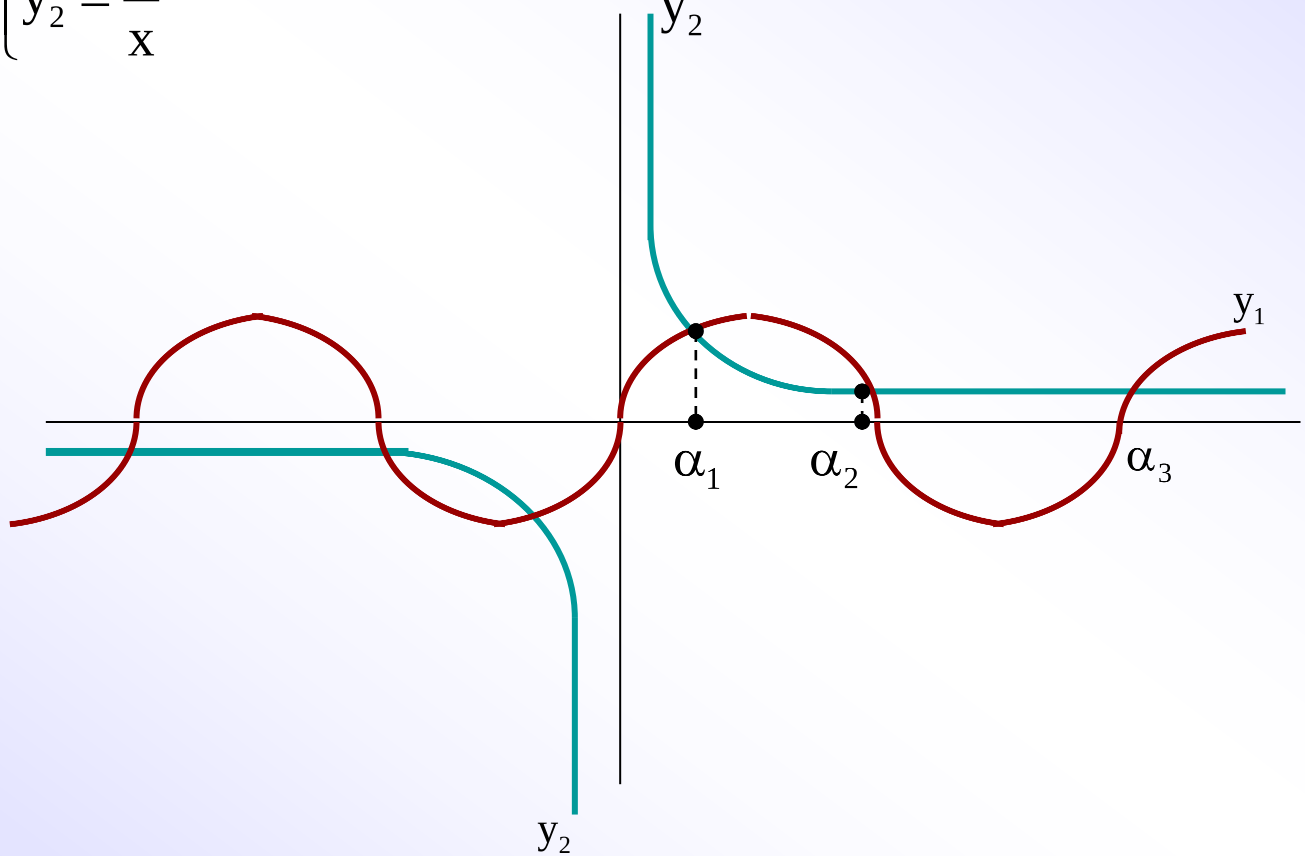
$$x \sin x - 1 = 0 \qquad (۲ . ۶)$$

در اینجا تابع $f(x)$ به شکل تفاضل دو تابع $f_1(x) = x \sin x$ و $f_2(x) = 1$ است ولی رسم تابع $y_1 = x \sin x$ ساده نیست . (منظور این است که به راحتی با تعیین دو سه نقطه قابل رسم نیست .) در این حالت می توان گفت که چون x=0 ریشهٔ معادله (۲ . ۶) نیست می توان طرفین آن را بر x تقسیم کرد و به دست آورد .

$$\sin x - \frac{1}{x} = 0 \qquad (۲ . ۷)$$

واضح اسن که مجموعه جوابهای (۲ . ۶) و (۲ . ۷) یکسان است (البته ، منحنی نمایش آنها یکسان نیست) . از این رو ، کافی است معادلهٔ (۲ . ۷) را بررسی کنیم . برای این منظور منحنی های زیر را رسم می کنیم و طول نقاط تلاقی آنها را به دست می آوریم . (شکل ۲ـ۵) .

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$



شکل ۲ـ۵

اولا با توجه به تابع $f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$ اگر $f(\alpha) = 0$

آن گاه

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) = 0 \qquad (۴\_۲)$$

یعنی ریشه ها نسبت به مبدا قرینه اند . شکل (۴_۲) نشان می دهد که معادله

دارای بی نهایت ریشهٔ مثبت است . α_1 در نزدیکی ۱ و بقیه در مجاورت

$k = 1, 2, \ldots, k\pi$

قرار دارند (نزدیک نقاطی که $\sin x$ صفر می شود) .

۲ـ۲ـ۶ جدول بندی مقادیر تابع

در این روش می توان ریشه هایی را که تابع f در دو طرف آن تغییـر علامـت مـی دهـد پیدا کرد . قبل از توضیح این روش تعریف زیر و قضیهٔ ۲ـ۲ـ۸ را بیان می کنیم .

۲ـ۲ـ۷ تعریف

فرض کنید

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x),\left(g(\alpha)\neq 0, m\in N\right)$$

اگر m>1 می گوییم α ریشهٔ تکراری معادلهٔ f(x)=0 است و مرتبهٔ تکرار آن m است .

این تعریف نشان می دهد که اگر m زوج باشد تابع f در نزدیکی α تغییر علامت نمی دهد یعنی f(x) در نزدیکی $x=\alpha$ و دو طرف آن دارای یک علامت است .

۲ـ۲ـ۸ قضیه

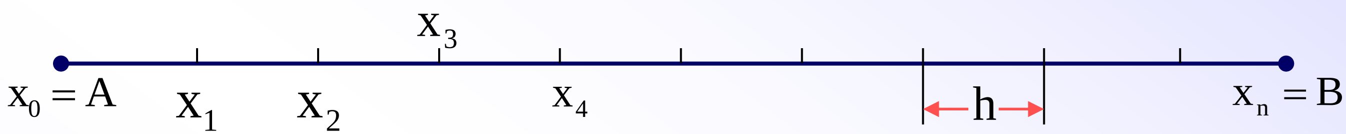
(بولتزانو ـ وایشتراس) : اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند c هست که $a<c<b$ و $f(c)=0$. به عبارت دیگر معادلهٔ $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در (a,b) دارد . به علاوه ، اگر f بر $[a,b]$ اکیدا یکنوا (صعودی یا نزولی باشد) c منحصر به فرد است .

د رعمل وقتی بخواهیم ریشه هایی از $f(x)=0$ را ، که f در دو طرف آنها تغییر علامت می دهد ، و در بازهٔ $[A , B]$ قرار دارند ، تعیین کنیم این بازه را به n قسمت متساوی تقسیم می کنیم و n آن قدر بزرگ اختیار می کنیم که نقاط تقسیم به اندازهٔ کافی به هم نزدیک باشند . در این صورت ، فاصلهٔ نقاط متوالی عبارت است از

$$h=\frac{B-A}{n}$$

و نقاط عبارتند از (شکل ۲ـ۶)

$$x_0 = A, x_i = x_0 + ih, i = 1,2,\dots,n$$



بعد قرار می دهیم :

$$\gamma_i = f(x_i)f(x_{i+1})$$

و سه حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱ـ اگر $\gamma_i < 0$ آن گاه حداقل یک ریشه در (x_i, x_{i+1}) موجود است . برای توابع هموار

و h کوچک ، معمولا یک ریشه موجود است .

۲ـ اگر $\gamma_i > 0$ ممکن است معادله در (x_i, x_{i+1}) ریشهٔ تکراری با مرتبهٔ تکرار زوج

داشته باشد . (مثلا ، برای $f(x)=\cos x - 1=0$ صفر ریشهٔ تکراری مرتبهٔ دوم

است و f د رمجاورت $x=0$ تغییر علامت نمی دهد .) این ظن وقتی قوی

می شود که خیلی کوچک باشد (و وقتی رد می شود که γ_i کوچک نباشد) .

به هر جهت تعیین این گونه ریشه ها آسان نیست و به تمهیدات بیشتری نیاز

دارد .

۳ـ اگر $\gamma_i = 0$ آن گاه $f(x_i) = 0$ یا $f(x_{i+1}) = 0$

۲_۲_۹ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادلهٔ $f(x)=\sin x-x+0/5=0$ را تعیین کنید .

با توجه به اینکه همواره $-1 \le \sin x \le 1$ داریم

$$-x-0/5 \le f(x) \le 1/5-x$$

از این رو ، اگر $1/5-x<0$ آن گاه $f(x)<0$ یعنی ریشه ای در $(1/5,\infty)$ موجود نیست

و اگر $0<-x-0/5$ آنگاه $0<f(x)$ و معادله در $(-\infty,-0/5)$ نیز ریشه ندارد .

پس باید بازهٔ $[-0/5 , 1/5]$ را مورد بررسی قرار می دهیم . جدول (۲-۶) نشان

می دهد که معادله در $(-0/5,1/5)$ یک ریشه دارد (اعداد تا چهار رقم اعشار

گرد شده اند) .

جدول ۲ـ۶

x	-0/5	1	1/5
sin x	-0/4794	0/8415	0/9975
f(x)	0/5206	0/3415	-0/0025

از جدول (۲ـ۶) و با توجه به مقادیر f(1) و f(1/5) ، ریشه باید نزدیک ۱/۵ باشد .

با توجه به اینکه

$$f(1/4)=0/047\ (3D)$$

نتیجه می گیریم که $\alpha \in (1/4, 1/5)$ مثلا $\alpha \approx 1/45$. چون $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$

تابع f اکیدا نزولی است و لذا ، تنها یک ریشه موجود است . البته تعیین

ریشه های معادلۀ $\sin x - x + 0/5 = 0$ به روش رسم منحنی ساده تر است .

۲ـ۲ـ۱۰ مثال

بدون رسم منحنی ثابت کنید معادلهٔ زیر تنها یک ریشه دارد .

$$f(x) = x^2 - (1-x)^5 = 0 \tag{۲ . ۸}$$

اولاً ، $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ پس حداقل یک ریشه در $(1,0)$ موجود است . اما چون

$f'(x) = 2x + 5(1-x)^4$ ، در صورتی که $x \geq 0$ داریم $f'(x) > 0$ ، یعنی تابع f در $[0,+\infty]$ اکیداً

صعودی است . بنابر این ، معادلهٔ (۲ . ۸) تنها یک ریشهٔ مثبت دارد . اکنون ثابت

می کنیم که این معادله ریشهٔ منفی ندارد . برای این منظور نشان می دهیم که

اگر $x<0$ آن گاه $f(x)<0$ زیرا ،

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5) \\ &= x^2 - 1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5 \\ &= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

حال چون ضریب توان های فرد x مثبت و ضریب توان های زوج x منفی است

نتیجه می گیریم که اگر $x<0$ آن گاه $f(x)<0$.

۲ـ۳ تعیین ریشه ها با دقت مطلوب

پس از تعیین حدود یک ریشه لازم است تقریبی از آن را با دقت خواسته شده حساب کنیم . برای این منظور دنباله ای از اعداد مانند $\{x_n\}$ می سازیم به طوری که حد این دنباله ریشهٔ مورد نظر باشد .

۴ـ۲ روش دو بخشی (یا روش تنصیف)

در این روش فرض می کنیم که دو عدد a و b موجودند به قسمی که

الف) تابع f در [a,b] پیوسته است

ب) $f(a)\,f(b) < 0$

ج) معادلهٔ $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را می نامیم) .

با مفروضات بالا دنبالهٔ $\{x_n\}$ را چنان می سازیم که $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

برای این منظور ، مطابق شکل (۲-۷) ، بازهٔ [a,b] را به دو بخش متساوی تقسیم

می کنیم . یعنی ، قرار می دهیم $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$

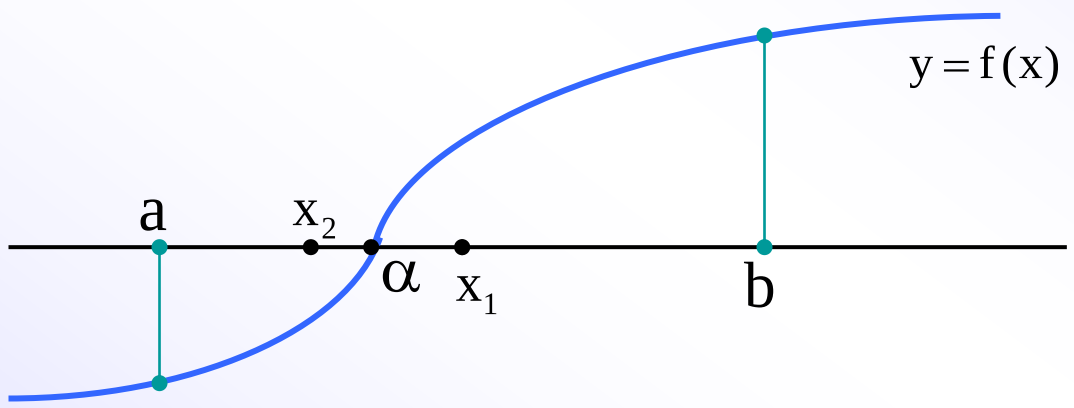
به عبارت دیگر ، x_1 را وسط بازهٔ [a,b] می گیریم تا [a,b] به دو بخش $[a, x_1]$ و

$[x_1, b]$ تقسیم شود .

با توجه به شرط (ج) ، α در یکی از این دو بخش قرار دارد . بخشی که α در آن قرار دارد ، اختیار و مجددا آن را به دو بخش متساوی تقسیم و نیمهٔ حاوی α را اختیار می کنیم

(در شکل (۲ـ۷) ، بازهٔ $[a, x_1]$ را اختیار می کنیم و قرار می دهیم $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$)

و این عمل را همین طور ادامه می دهیم .



شکل ۲ـ۷

اما ، در حالت کلی رسم منحنی میسر نیست و می توان برای ادامهٔ کار به طریق جبری زیر عمل کرد :

۱ـ اگر $f(a)f(x_1)<0$ آن گاه ریشه در $[a,x_1]$ است . از این رو ، می توان قرار داد $b=x_1$ و مجددا عمل را در [a,b] تکرار کرد .

۲ـ اگر $f(a)f(x_1)>0$ آن گاه ریشه در $[x_1,b]$ است ، لذا ، می توان قرارداد $a=x_1$ و مجددا عمل را در [a,b] تکرار کرد .

۳ـ اگر $f(a)f(x_1)=0$ آن گاه ریشه x_1 است و عمل خاتمه پیدا می کند .

به این ترتیب دنباله ای چون $\{x_n\}$ ساخته می شود . البته عملا نمی توان بینهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهایی برای توقف عملیات وجود داشته باشد . اینکه جملات دنبالهٔ بالا تا کجا باید حساب شوند و آیا این دنباله همگرا است یا نه را بعدا بررسی می کنیم .

۲ـ۴ـ۱ مثال

می دانیم که معادلهٔ $x+\cos x = 0$ فقط یک ریشه در $(-1, 0)$ دارد . تقریبی از این ریشه را به روش دو بخشی حساب کنید .

حل :

جدول زیر محاسبات مربوط را نشان می دهد . (به نحوهٔ درج اعداد در جدول توجه کنید ، نمودار جریان این روش در ۲ـ۴ـ۶ آمده است) .

د راین مثال ، $a=-1$ ، $b=0$ ، (2D) $f(a)=-0/46$ و $f(b)=1$

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)f(x_n)$ تعیین می شود و همواره $a < b$.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)f(x_n)$ علامت
1	-1	0	-0/5	-
2	-1	-0/5	-0/75	+
3	-0/75	-0/5	-0/625	-
4	-0/75	-0/625	0/6875	-
5	-0/75	-0/6875	-0/71875	-
6	-0/75	-0/71875	-0/734375	+
7	-0/734375	-0/71875	-0/7265625	

۲_۴_۲ مثال

تقریبی از یک ریشهٔ معادلهٔ $3xe^{x}=1$ را تا سه رقم اعشار درست حساب کنید .

حل :

معادلهٔفوق را به صورت $f(x)=3x-e^{-x}=0$ می نویسیم . واضح است که ریشه هـای دو معادلـه یکسان هستند . پس از جدول بند ب مقادیر f در میابیم کـه f در بـازهٔ (0/25,0/27) تغییـر علامت می دهد و با توجه به اکیدا صعودی بودن f معادله تنها یک ریشه دارد . جـدول زیـر تقریبی از ریشه را تا سه رقم اعشار درست به دست می دهد . در ایم جدول ،

$a = 0/25 \quad , \quad f(a) = -0/0288 \quad (4D)$

$b = 0/27 \quad , \quad f(b) = 0/4662$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	0/25	0/27	0/26	-
2	0/25	0/26	0/255	+
3	0/255	0/26	0/2575	+
4	0/2575	0/26	0/2588	-
5	0/2575	0/2588	0/2582	-
6	0/2575	0/2582	0/25785	

از این رو ، ریشه تا سه رقم اعشار برابر 0/258 است .

۲ـ۴ـ۳ همگرایی روش دوبخشی

با توجه به نحوهٔ به دست آمدن x_n ها به روش دو بخشی داریم (شکل (۲ـ۷) ملاحظه می شود) :

$$|x_1-\alpha| < \frac{b-a}{2}$$

همچنین با توجه به اینکه طول بازهٔ $[a, x_1]$ برابر $\frac{b-a}{2}$ است داریم :

$$|x_2-\alpha| < \frac{\frac{b-a}{2}}{2} \quad \frac{b-a}{2^2}$$

بنابراین ، پس از n تکرار ، نتیجه می شود

$$0 \le |x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

(۲ـ۹)

چون $\alpha < \frac{1}{2} < 1$ بنابر قضیهٔ ۲ . ۳ . ۲ ، $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ در نتیجه $\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ پس .

بنابر قضیهٔ ۲ـ۳ـ۴ ، $\lim |x_n-\alpha| = 0$

که نتیجه می دهد

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین ، روش دو بخشی همیشه همگراست . یعنی ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به این روش ساخته مـی شود حتما به همگراست . ضمنا نا مساوی (۲ . ۹) یک کران بالا برای خطای به دست می دهد ، توجه کنید که این کران بالا ، یعنی $\frac{b-a}{2^n}$ ، قبل از محاسبهٔ x_n قابل محاسبه است . بنابر این ، x_n را یک کران خطای پیشین برای $\frac{b-a}{2^n}$ x_n می نامند . از (۲ . ۹) سرعت همگرایی $\{x_n\}$ به α را نیز می توان پیش بینی کرد، این سرعت متناسب با سرعت همگرایی دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ به صفر است . با توجه به اینکه $2^{10} \approx 1000$ داریم :

$$\frac{1}{2^{10}} \approx 0/001 = 10^{-3}$$

بنابر این ، بعد از هر ۱۰ تکرار سه رقم به ارقام درست جواب تقریبی اضافه می شود، و این نشان می دهد که روش دو بخشی کند است و برای تعیین صفرهای توابعی توصیه می شود که محاسبهٔ آنها ساده و کم خطا باشد .

نا مساوی (۲ . ۹) در تعیین تقریبی که خطای آن از عدد کوچک معلومی کوچکتر باشد نیز به کار می رود ، به مثال زیر توجه کنید .

۲ـ۴ـ۴ مثال

تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x) = x^2 - 2$ یعنی $\alpha = \sqrt{2}$ را به روش دو بخشی حساب کنید که برای آن داشته باشیم

$$|x_n - \alpha| \langle 10^{-2}$$

با توجه به اینکه ریشهٔ معادله در $(1,2)$ است داریم $b-a=1$ و

$$|x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

پس ، کافی است n را چنان پیدا کنیم که

$$\frac{1}{2^n}\le 10^{-2}$$

اولین n که در نا مساوی بالا صدق می کند ۷ است . پس باید تا x_7 حساب کنیم ، جدول (۲ـ۸) به همین منظور تنظیم شده است .

$$(\ a=1\ ,\ f(a)=-1\ ,\ b=2\ ,\ f(b)=2\ )$$

جدول (۲ـ۸)

n	a	b	$x_n = \dfrac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	1	2	1/5	-
2	1	1/5	1/25	+
3	1/25	1/5	1/375	+
4	1/375	1/5	1/4375	-
5	1/375	1/4375	1/40625	+
6	1/40625	1/4375	1/421875	-
7	1/40625	1/421875	1/4140625	

۲_۴_۵ معیارهای توقف

برای توقف محاسبهٔ x_n ها ، نه فقط در روش دو بخشی بلکه در روشهایی که بعدا هم معرفی خواهند شد ، معیارهایی وجود دارد که در این قسمت بررسی می کنیم.

الف) اگر ε عدد مفروض و کوچکی باشد ، x_n ها را تا جایی حساب می کنیم که $|f(x_n)|<\varepsilon$. یعنی ، به محض اینکه $|f(x_n)|<\varepsilon$ عملیات را متوقف می کنیم . دلیل این است که حال اگر $f(\alpha)=0$ و $|f(x_n)|$ خیلی کوچک باشد ، مثلا ، کوچکتر از 10^{-7} ، اکثرا می توان نتیجه گرفت که x_n خیلی به α نزدیک است .

ب) اگر $|x_n - x_{n-1}|<\varepsilon$ عملیات را متوقف و x_n را به عنوان تقریبی از α می پذیریم . به عبارت دیگر ، وقتی اختلاف دو تقریب متوالی بسیار کوچک باشد ادامهٔ روش معقول به نظر نمی آید .

اگر α بسیار بزرگ یا بسیار کوچک باشد عملیات را وقتی متوقف می کنند که $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|<\varepsilon$ ، در واقع تا حدودی خطای نسبی x_{n-1} از ε کوچکتر قرار می گیرد .

ج) گاهی خواسته می شود عملیات را وقتی متوقف کنیم که خطای مطلق x_n از α از ε کوچکتر باشد یعنی ، وقتی که $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. چون مقدار α معلوم نیست از نامساوی (۲ . ۹) استفاده می کنیم و قرار می دهیم (مثال ۲ـ۴ـ۴ را نیز ملاحظه کنید) :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \qquad (۲ . ۱۰)$$

که از آن نتیجه می شود

$$2^n \leq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

سپس n را کوچکترین عدد طبیعی اختیار می کنیم که در نا مساوی زیر صدق کند (از طرفین نامساوی بالا در مبنای ۲ لگاریتم بگیرید) .

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

در این صورت ، اگر x_n را حساب کنیم خطای مطلق آن از ε کوچکتر خواهد بود زیرا از (۲ . ۹) و (۲ . ۱۰) داریم :

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$$

که نتیجه می دهد ،

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

د) گاهی خواسته می شود که پس از m تکرار (m معلوم است) ، عملیات متوقف و x_m به عنوان تقریبی از α پذیرفته شود .

۲ـ۴ـ۵ تبصره

توجه کنید که ε را نباید خیلی کوچک اختیار کرد . مثلا در دقت معمولی ،

اگر ε را کوچکتر از 10^{-7} اختیار کنیم ممکن است نا مساوی های $|f(x_n)| < \varepsilon$ یا

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ هرگز برقرار نشوند . از این رو ، بهتر است تلفیقی از معیار (الف) یا (ب) را با

معیار (د) در نظر گرفت . مثلا ، عملیات را وقتی متوقف می کنیم که

$$|f(x_n)| < \varepsilon$$

و یا

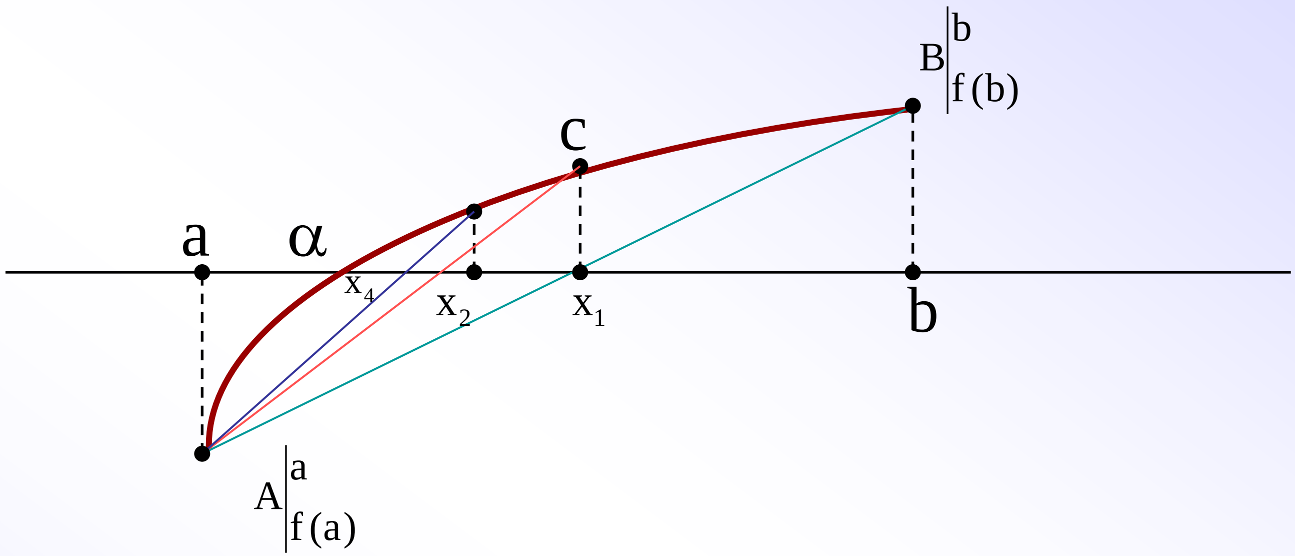
$$n = m$$

که در آن ε و m دو عدد مفروض هستند .

۲ـ۵ روش نابجایی

روش نابجایی بسیار قدیمی است و مصریان قدیم آن را مورداستفاده قرار داده اند. اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\ f(b) < 0$ و معادلۀ $f(x)=0$ تنها یک ریشه در $(a\ ,\ b)$ داشته باشد برای تعیین تقریبی از این ریشه ، که آن را α می نامیم ، چنین استدلال می شود :

گرچه منحنی نمایش $y=f(x)$ بین دو نقطۀ A و B یک خط مستقیم نیست اما اگر A و B را با یک خط مستقیم به هم وصل کنیم محل تلاقی آن با محور $x'ox$ ، نقطه ای به طول x را می دهد که تقریبی از α است (شکل ۲ـ۹) . بعد x_2 ، x_3 و... را به همین ترتیب ، مطابق شکل ، به دست می آوریم .



شکل ۲ـ۹

برای تعیین مقدار x_1 برحسب مختصات A و B خط AB را می نویسیم و آن را با محور $x'ox$ قطع می دهیم .

معادلهٔ خط AB :

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نقطهٔ تلاقی این خط را با محور $x'ox$ نقطه ای به مختصات $(x_1,0)$ می‌گیریم در نتیجه باید داشته باشیم

$$\frac{0-f(a)}{x_1-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

که پس از ساده کردن ، فرمول روش نابه جایی به دست می آید

$$x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (۲ .۱۱)$$

برای تعیین x_2، تقریبا مشابه روش دو بخشی ، سه حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱ـ اگر $f(a)f(x_1)<0$ آنگاه ریشه در (a,x_1) است . لذا ، در فرمول (۲ .۱۱) بـه جـای b قـرار مـی دهیم x_1 (به عبارتی از سه نقطهٔ a و b و x_1 ، نقطهٔ b نابجاست) و x_2 را حساب می کنیم به عبارت دیگر

$$x_2=\frac{af(x_1)-x_1f(a)}{f(x_1)-f(a)}$$

۲ـ اگر $f(a)f(x_1)>0$ ریشه در (x_1, b) است و x_2 از فرمول زیر حساب می شود

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

۳ـ اگر $f(a)f(x_1)=0$ ریشه x_1 است و مسئله حل شده است .

به این ترتیب باز هم دنباله ای از اعداد حاصل می شود که چون در بازه هایی قرار دارند که طول آنها مرتبا کوچک می شود همیشه همگراست .نمودار جریان این روش ، با معیار توقف $|f(x_1)|<\varepsilon$ ، دقیقا مانند نمودار جریان روش دو بخشی است (۲ـ۴ـ۶ را ملاحظه می کنید) تنها تفاوت فرمول مربوط به محاسبهٔ x است که چنین است

$$x \leftarrow \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

۲ـ۵ـ۱ مثال

تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^{x}=1$ را که در (0/25 , 0/27) قرار دارد ، به روش نابجایی ، تا سه رقم اعشار درست حساب کنید .

پس از نوشتن معادله بالا به شکل $f(x)=3x-e^{-x}=0$ داریم (عملیات تا چهار رقم اعشار گرد شده اند) :

$$x_1=\frac{0/25\times 0/0466-0/27\times(-0/0288)}{0/0466-(-0/0288)}=0/2577$$

چون ، $f(x_1)=0/0003$ ریشه در (0/25 , 0/2577) است و

$$x_2=\frac{0/25\times 0/0003-0/2577\times(0/0288)}{0/0003-(-0/0288)}$$

بنابر این ، ریشه تا سه رقم اعشار درست برابر 0/258 است .

مثال ۲ـ۵ـ۲

برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=x^2-2=0$ دو تکرار از روش جابجایی را انجام دهید .

با انتخاب a =1 و b =2 داریم :

$$f(a) = -1 \quad , \quad f(b) = 2$$

و

$$x_1=\frac{1\times 2-2\times(-1)}{2-(-1)}=\frac{4}{3}$$

چون ، ریشه در است . بنابر این ،

$$x_2=\frac{\frac{4}{3}\times 2-2\times\left(-\frac{2}{9}\right)}{2-\left(-\frac{2}{9}\right)}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{4}{9}}{2+\frac{2}{9}}=1/4$$

مقدار x_2 را با مقدار نظیر آن که د رمثال ۲ـ۴ـ۲ به دست آوردیم مقایسه کنید .کدام تقریب بهتر است ؟ (حتما می دانید که $\alpha=\sqrt{2}=1/4142...$)

۲ـ۵ـ۳ خصوصیات روش نا به جایی

روش نا به جایی ،همانند روش دو بخشی ، همگراییِ تضمین شده دارد و عموما سریعتر از

روش دو بخشی است و جایگزین خوبی برای آن است . البته ، عملیات این روش بیش از

روش دو بخشی است (دو برابر و نیم) . اما ، اگر   ها جملگی در یک طرف X_i ریشه باشند

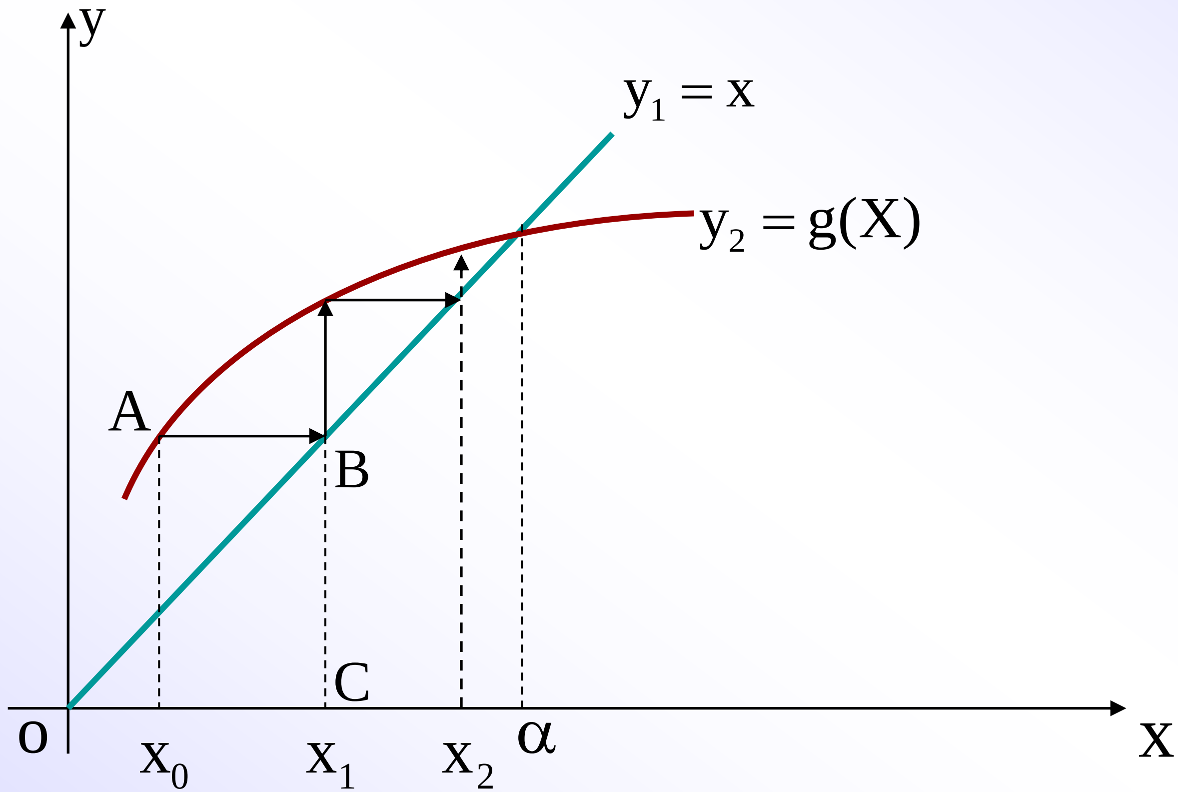
همگرایی می تواند حتی کند تر از روش دو بخشی باشد

(شکل (۲ـ۱۰) را ببینید) .

۲ـ۶ـ۲ تعیین جملات $\{x_n\}$ به روش هندسی

اولا ریشهٔ $x=g(x)$ طول محل تلاقی منحنی های زیر است :

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = g(X) \end{cases}$$



شکل ۲ـ۱۳

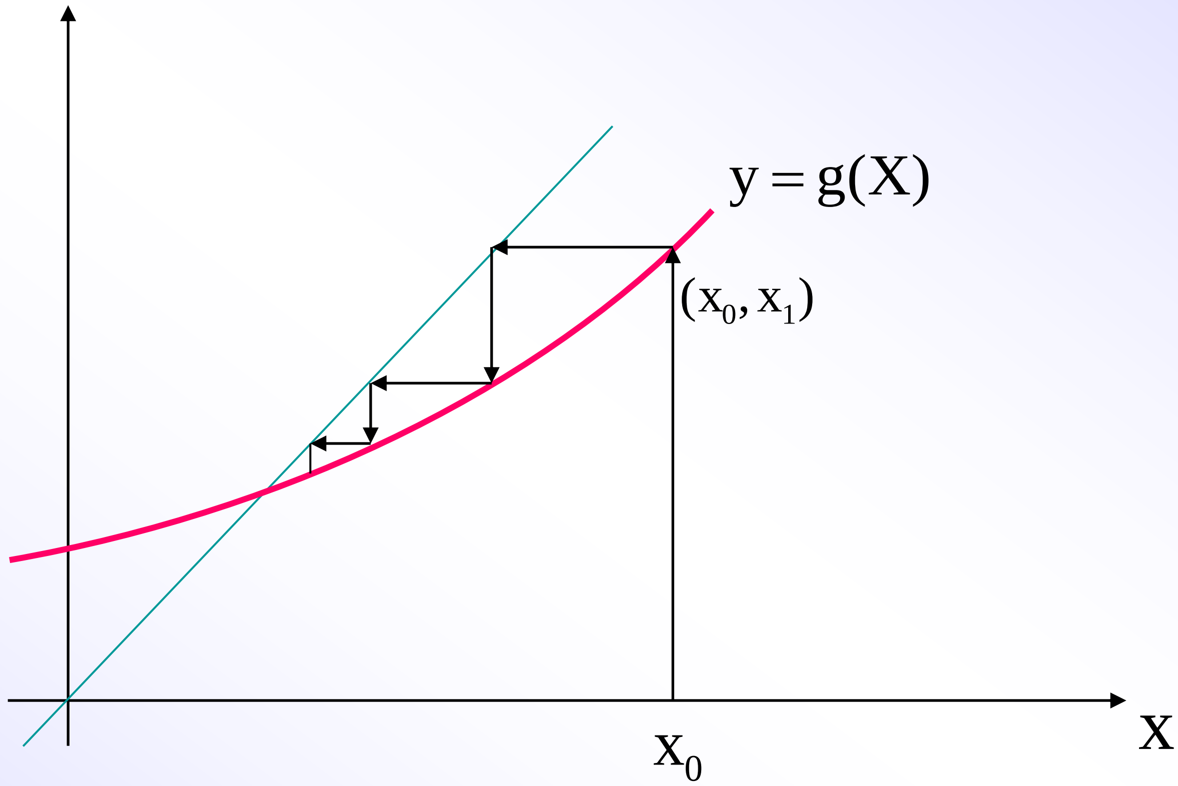
اگر x_0 معلوم باشد فاصلهٔ A تا محور ox همان $g(x_0)$ (یا x_1) است . بنابر این ، اگر از A خطی موازی با محور ox بکشیم تا منحنی $y = x$ (یعنی نیمساز ربع اول و سوم) را در B قطع کند ، فاصلهٔ B تا محور ox نیز $g(x_0)$ است . ازطرف دیگر ، BC=OC ، زیرا زاویهٔ COB مساوی 45° است . پس ،

$$OC = BC = g(x_0) = x_1$$

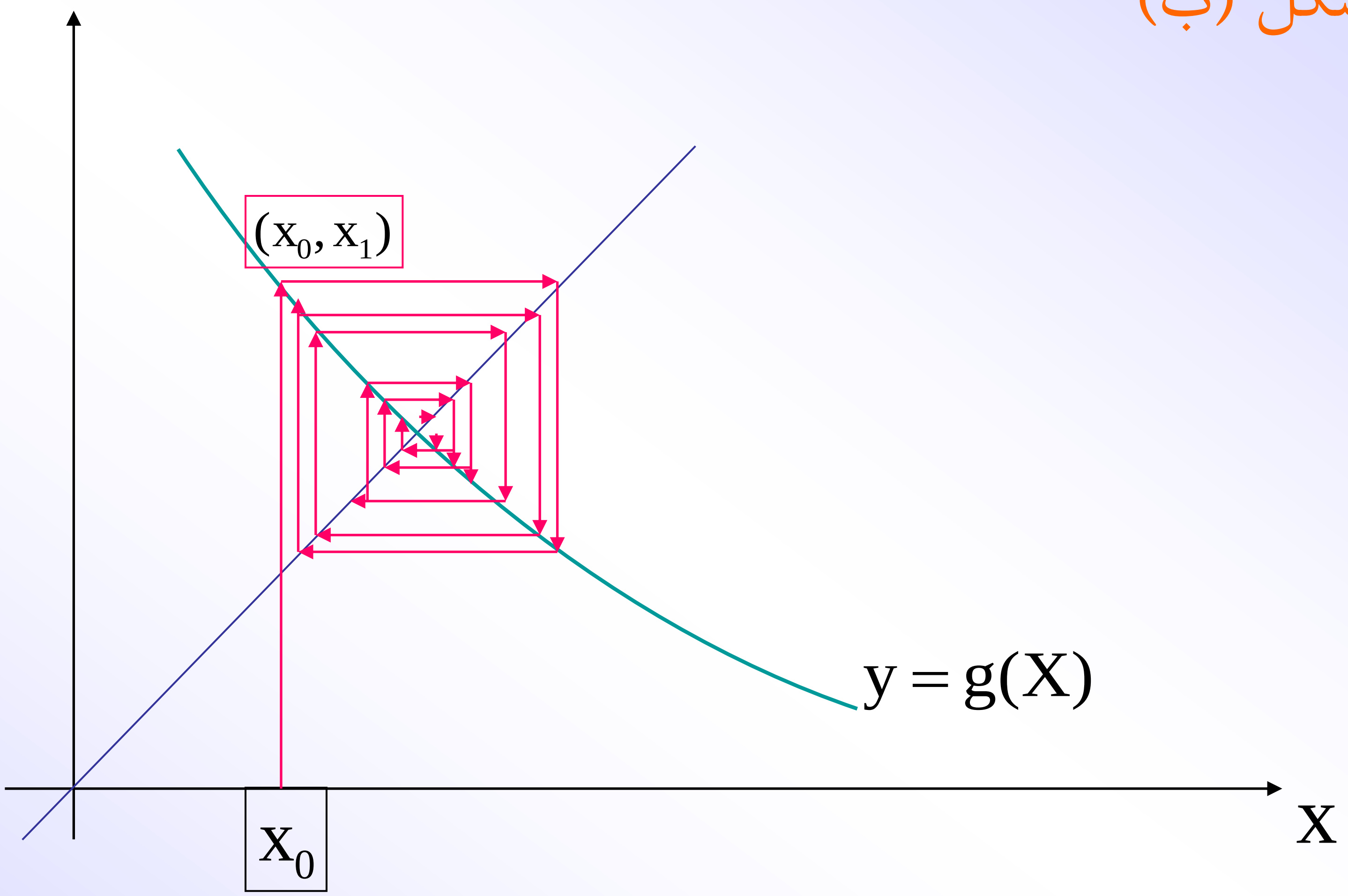
به همین ترتیب x_2 به دست می آید (به شکل توجه کنید) .

شکل های ارائه شده حالات مختلف $g(x)$ و x_0 و همگرایی یا واگرایی $\{x_n\}$ را نشان می دهند .

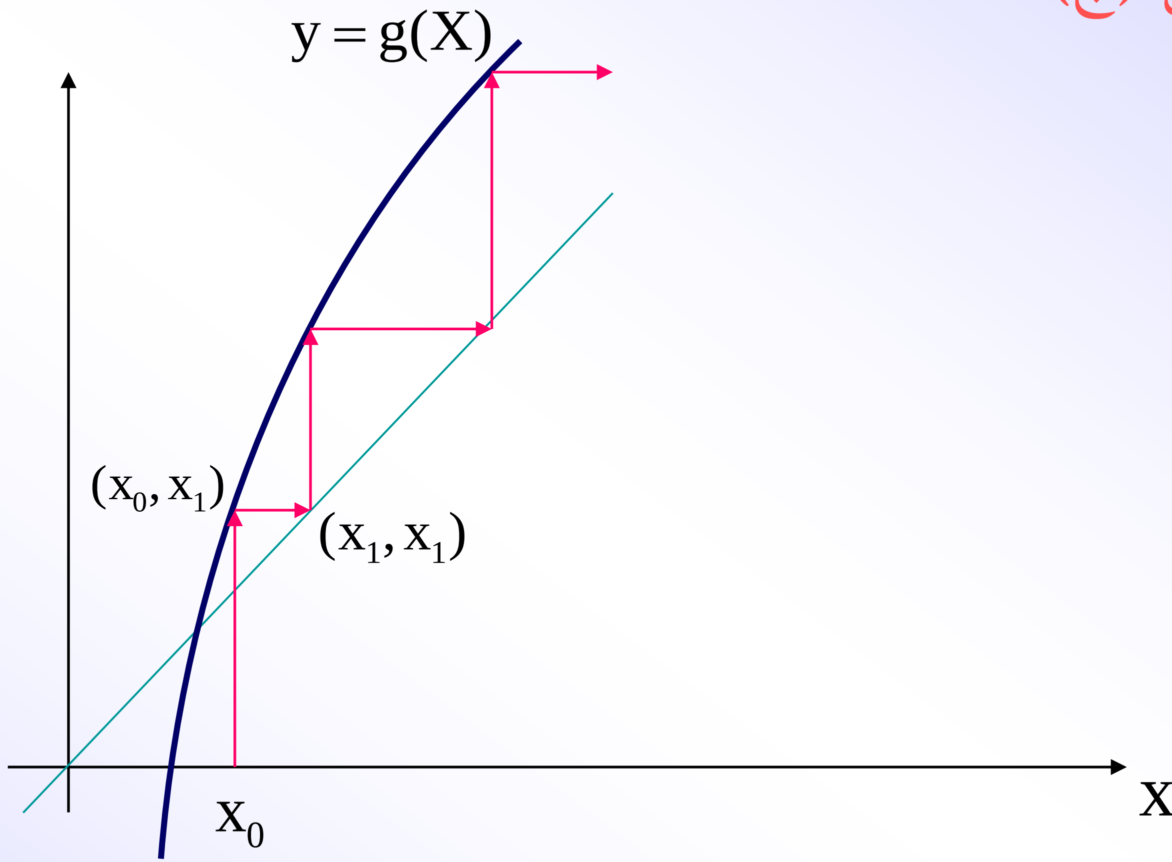
شکل (الف)



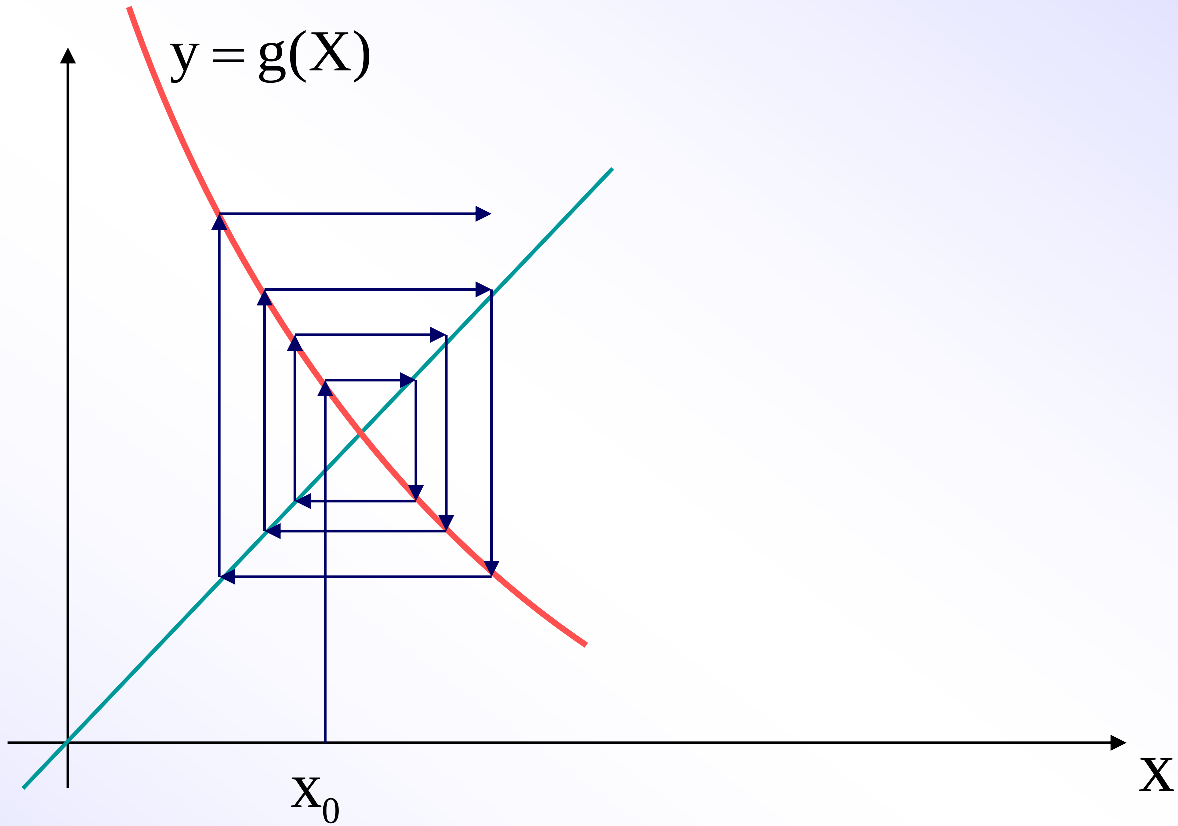
شکل (ب)



شکل (ج)



شکل (د)



شکل های (الف) و (ب) همگرایی و شکل های (ج) و
(د) واگرایی دنبالهٔ $\{X_n\}$ را نشان می دهند .

۲ـ۶ـ۳ همگرایی روش تکرار ساده

تعیین خصوصیات تابع $g(x)$ و مقدار اولیهٔ x_0 که به ازای آن ها $\{x_n\}$ همگرا باشد مستلزم قضیهٔ زیر است .

۲ـ۶ـ۴ قضیه

اگر f تابعی بر $[a,b]$ و در هر نقطهٔ (a,b) مشتق داشته باشد η ی از (a,b) هست که

$$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a).$$

با استفاده از قضیهٔ بالا ، ابتدا به ذکر این مطلب می پردازیم که چون

$$x_{n+1}=g(x_n),\alpha=g(\alpha)$$

بنابر قضیهٔ ۲ـ۶ـ۴ ،

$$x_{n+1}-\alpha=g(x_n)-g(\alpha)=g'(\eta_n)(x_n-\alpha)$$

که در آن η_n بین x_n و α است . بنابر این ،

$$|x_{n+1}-\alpha| = |g'(\eta_n)||x_n-\alpha|$$

شرط کافی برای اینکه $|x_n-\alpha| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ آن است که جملات دنبالهٔ $\{|x_n-\alpha|\}$

مرتبا کوچک شوند . یعنی ، وقتی که همواره

$$|g'(\eta_n)| \le L < 1$$

اما چون جای η_n مشخص نیست عملی تر است که شرط بالا را با شرط

$$|g'(x)| \le L < 1, \alpha$$

در یک همسایگی جایگزین کنیم .

دو قضیهٔ بعد همه چیز را با استدلال روشن می کنند .

۲ـ۶ـ۵ قضیه

اگر g تابعی بر [a,b] به توی [a,b] باشد و در این بازه

(۲ . ۱۴)

$$|g'(x)| \le L < 1$$

آن گاه معادلهٔ g(x) = x تنها یک ریشه دارد ، که متعلق به [a,b] است .

۲ـ۶ـ۶ قضیه

با شرایط قضیهٔ ۲ـ۶ـ۵ ، به ازای هر x_0 از [a,b] دنبالهٔ $\{x_n\}$ با شرط $x_{n+1} = g(x_n)$

به تنها جواب g(x) = x همگراست .

مثال های زیر نحوۀتشخیص مناسب بودن g و تعیین L را روشن می کنند و نشان می دهند

که چگونه می توان قبل از محاسبۀ جملات $\{x_n\}$ سرعت همگرایی آن را پیش بینی کرد .

۲ـ۶ـ۷ مثال

برای تعیین ریشۀ مثبت معادلۀ $x^2 + x - 1 = 0$ که در بازۀ I=[0/5 , 1] قرار دارد ، به روش

تکرار ساده ، g(x) های زیر را انتخاب می کنیم (مثال ۲ـ۶ـ۱ملاحظه شود) . مناسب بودن یا

نبودن هریک و بازه ای که x_0 می تواند از آن انتخاب شود را تعیین کنید .

الف) $g_1(x)=1-x^2$

واضح است که $g_1'(x)=-2x$ اگر $x\in I$ آنگاه

$$|g_1'(x)|=2x\ge 1$$

بنابراین ، بهتر است از $g_1(x)$ استفاده نکنیم ، د رواقع هر عضو x_0 I باشد $\{x_n\}$ واگراست.

ب)

چون $g_2(x)=\sqrt{1-x}$ داریم

و اگر x نزدیک ۱ باشد $g_2'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ می تواند بسیار بزرگ باشد . آیا $|g_2'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ مناسب نیست؟

جدول(12.2) نشان می دهد که $|g_2'(x)|$ و $g_2(x)$ مناسب هستند. پس باید همسایگی کمی تنگ تراختیار شود .

$x_0=0/5 \quad g_2(x)$

به تحقیق معلوم می شود که (تحقیق کنید)

$$\alpha \in [0/51, 0/7]$$

حال سعی می کنیم ثابت کنیم اگر $0/51 \le x \le 0/7$ آن گاه

$$\left|g_2'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \le L \langle 1$$

برای این منظور نا مساوی های زیر را می نویسیم (این روش را برای همیشه الگو قرار دهید
)

$$0/51 \le x \le 0/7$$

$$-0/7 \le -x \le -0/51$$

$$0/3 \le 1-x \le 0/49$$

$$0/55 \approx \sqrt{0/3} \le \sqrt{1-x} \le \sqrt{0/49} = 0/7$$

از نا مساوی های اخیر معلوم می شود که $g_2(x)$ تابعی بر $[0/51,0/7]$ به توی همین بازه است و نیز .

$$\left|g_2'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{2\sqrt{0/3}} \approx 0/91 < 1$$

بنابراین ، $L= 0/91$. پس $g_2(x)$ مناسب است . اما ، چون L نزدیک عدد یک اسـت همگرایـی کند است . (جدول (۲ . ۱۲) مؤید این پیشگویی است) .

ضمنا ، علت اینکه $g_2(x)$ برای $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ دنباله ای واگرا تولید می کند آن است کـه ایـن دو مقدار اولیه در $(0/51,0/7)$ نیستند .

ج) $g_3(x) = \dfrac{1}{x+1}$

د راین حالت ، $g_3'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ و اگر $x \in [0/51, 0/7]$

$$\left|g_3'(x)\right| = \frac{1}{(x+1)^2} \le \frac{1}{(0/5+1)^2} = \frac{1}{2/25} \langle 1$$

مشاهده می شود که نه فقط $g_3(x)$ مناسب است بلکه L هم ، یعنی $\frac{1}{2/25}$ به صفر نزدیکتر

است تا به یک ، در نتیجه انتظار می رود که همگرایی $\{x_n\}$ نسبتا تند باشد . ضمنا اگر

$x \in [0/51, 0/7]$ نتیجه می شود

$$\frac{1}{1/7} = \frac{1}{1+0/7} \le \frac{1}{1+x} \langle \frac{1}{1+0/5} = \frac{2}{3}$$

بنابر این با توجه به اینکه $\frac{2}{3} < 0/7$ و $0/51 < \frac{1}{1/7}$ ، داریم : $g_3(x) = \frac{1}{1+x} \in [0/51, 0/7]$

یعنی ، g_3 تابعی بر [0/51,0/7] بتوی همین بازه است .

۲ـ۶ـ۸ مثال

۱ـ برای تعیین تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^{x}=1$ و روش تکرار ساده استفاده کنید.

حل : معادله را به شکل $x=\frac{e^{-x}}{3}$ می نویسیم و قرار می دهیم $g(x)=\frac{e^{-x}}{3}$

به سادگی معلوم است که ریشهٔ معادلهٔ بالا در $(0,1)$ قرار دارد و g تابعی بـر $(0,1)$ بتـوی $(0,1)$ است . در ضمن

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{3}$$

و اگر $x\in[0,1]$ داریم

$$|g'(x)|=\frac{e^{-x}}{3}\langle\frac{e^{0}}{3}=\frac{1}{3}$$

در اینجا $L=\frac{1}{3}$ که کوچکتر از یک است و $g(x)$ مناسب است . در نتیجه ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ به ازای هر x_0 از $(0,1)$ همگراست .

با استفاده از $x_0 = 0/5$ و رابطهٔ

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیر هستند

$x_1 = 0/2022$ (4 D)

$x_2 = 0/2723$ (4 D)

$x_3 = 0/2539$ (4 D)

$x_4 = 0/2586$ (4 D)

$x_5 = 0/2574$ (4 D)

$x_6 = 0/2577$ (4 D)

$x_7 = 0/2576$ (4 D)

$x_8 = 0/2576$ (4 D)

لذا ، جواب تا چهار رقم اعشار درست 0/2576 است . اگر $f(x)=3xe^{x}-1$ را به ازای x_8 حساب کنید . نتیجه $-1/3499\times10^{-4}$ خواهد شد که عددی کوچک است .

۲ـ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x+\cos x=0$ ، به روش تکرار ساده ، چنان حسب کنید که $|f(x_n)|<10^{-2}$.

قرار می دهیم

$$x=-\cos x=g(x)$$

می دانیم که ریشهٔ معادلهٔ $x+\cos x$ در [-1,0] قرار دارد . با توجه به این که تابع کسینوس بر این بازه صعودی است داریم

$$-1\le x\le 0$$

$$0/541\approx\cos(-1)\le\cos x\le 1$$

بنابراین ، $-1\le -\cos x \le -0/541<0$

یعنی ، $g(x)\in[-1,0]$ همچنین داریم $g'(x) = \sin x$ و

$$|g'(x)| = -\sin x = \sin(-x)$$

پس اگر $x\in[-1,0]$ ، با توجه به این که $0\le -x \le 1$ و تابع سینوس بر بازهٔ $[0,1]$ صعودی است

داریم

$$0\le \sin(-x)\le \sin 1\approx 0/8415$$

پس ، $g(x)$ مناسب است ، ولی همگرایی کند است . با فرض $x_0 = -0/7$ داریم

$x_1 = -0/7648$

$x_2 = -0/7215$

$x_3 = -0/7508$

$x_4 = -0/7311$

$x_5 = -0/7444$

$|f(x_5)| \approx 0/00891 < 10^{-2}.$

۲ـ۷ مرتبۀهمگرایی یک دنباله

تا کنون برای آهنگ همگرایی یک دنباله از کلمات کند و تند یا سریع استفاده کرده ایم . اما ، به راستی معیاری برای سرعت میل کردن جملات یک دنباله وجـود دارد ؟ در اینجـا معیـاری موسوم به مرتبۀ همگرایی تعریف می کنیم . که توسـط آن نـه فقـط انـدازه ای بـرای سـرعت همگرایی به دست می آید بلکه توشط آن می توان سرعت همگرایـی دنبالـه هـای متفـاوت را باهم مقایسه کرد و در نتیجه دو روش را از این نظر مورد مقایسه قرار داد .

۲ـ۷ـ۱ تعریف

فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد ثابت ، حقیقی و مثبت p و C چنان باشند که

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = C$$

در این صورت ، p را مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ به α نامند. گاهی گفته می شود که روشی که $\{x_n\}$ ها از آن به دست می آیند از مرتبهٔ p است .

به راحتی می توان مشاهده کرد که هرچه p بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است .

۲ـ۷ـ۲ قضیه

اگر $\{x_n\}$ از روش تکرار ساده به دست آمده باشد ، و به عدد α که ریشهٔ $x=g(x)$ است همگرا باشد و $g'(a) \neq 0$ آن گاه مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ یک است .

۲ـ۷ـ۳ قضیه

در صورتی که $g'(\alpha)=0$ ، مرتبهٔ همگرایی حداقل دو است .

۲ـ۷ـ۴ تعبیر عددی مرتبهٔ همگرایی

اگر مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ مساوی دو باشد ، داریم ، برای n های نسبتا بزرگ ،

$$|x_{n+1}-\alpha| \approx c|x_n-\alpha|^2$$

که در آن c عددی ثابت و مخالف صفر است . فرض کنید c حدود عدد یک باشد . در این صورت ، اگر $|x_1-\alpha|$ حدود 0/1 باشد $|x_2-\alpha|$ حدود 0/01 خواهد بود و بعد $|x_3-\alpha|$ حدود 0/0001 و بالاخره $|x_4-\alpha|$ حدود 10^{-8} خواهد بود . به عبارت دیگر ، ارقام اعشار درست x_n در هر مرحله تقریبا دو برابر مرحلهٔ قبل می شود .

۲ـ۸ روش نیوتن ـ رَفسُن

این روش یکی از سریعترین روش هایی است که تا کنون بررسی کرده ایم . برای به کار بردن این روش باید تخمین نسبتا نزدیکی از ریشهٔ مورد نظر در دست باشد . از این رو ، این روش لیشتر برای تصحیح تقریب های نا دقیقی که از روش های دیگر به دست آمده است به کار می رود . این روش ، همان طور که در ۲ـ۸ـ۴ نشان داده خواهد شد ، حالت خاصی از روش تکرار ساده است و تعمیم آن برای تعیین تقریبی از جواب های یک دستگاه معادلات غیر خطی ساده است . از این به بعد روش نیوتن ـ رفسن را به طور خلاصه روش نیوتن می نامیم .

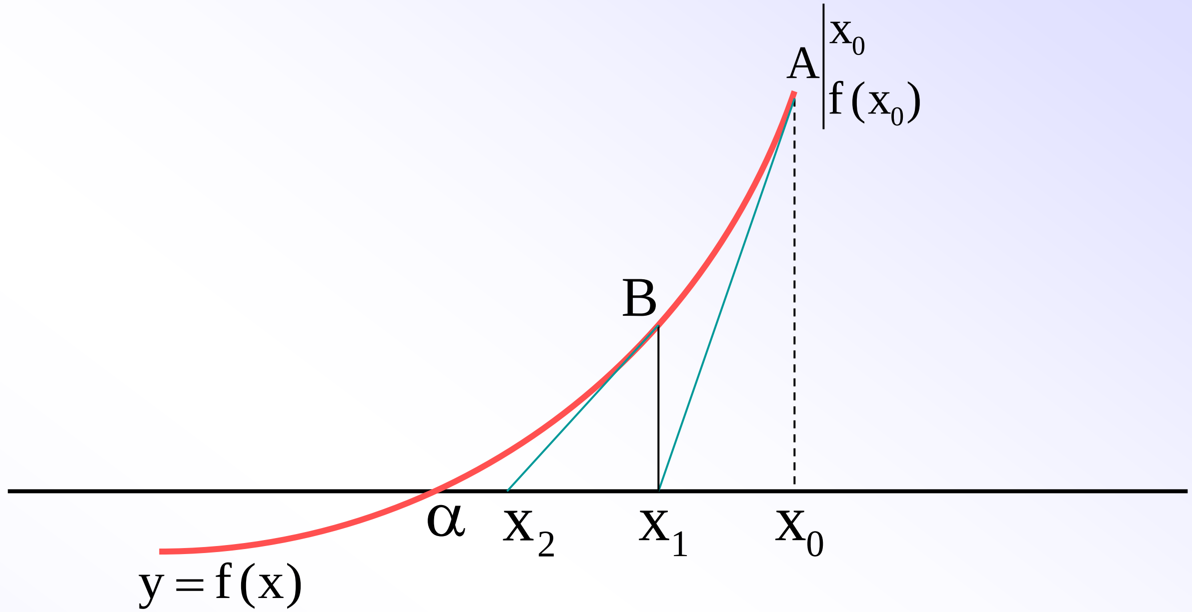
۲ـ۸ـ۱ فرمول تکرار روش نیوتن

فرمول روش نیوتن را می توان به دو طریق به دست آورد که در زیر به شرح آن ها می پردازیم .

طریقۀاول

در این روش از روش هندسی بدست آمدن جملات روش نیوتن استفاده می شود . در این روش اگر x_0 تقریبی از α باشد ، از نقطۀ A واقع بر منحنی y=g(x) به طول x_0 مماس بر این منحنی رسم می کنیم و محل تلاقی آن را با محور طول ها x_1 می نامیم ، شکل (۲ـ۱۴) .

بعد این عمل را تکرار می کنیم تا به تقریب مطلوب برسیم .



شکل ۲ـ۱۴

اگر x_0 معلوم باشد ، برای به دست آوردن x_1 باید معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ را در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\ f(x_0)\end{matrix}\right.$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور $x'ox$ تعیین کنیم . ضریب زاویهٔ این خط $f'(x_0)$ است . بنابراین ،

معادلهٔ خط مماس

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور طول ها را $(x_1, 0)$ می‌گیریم . پس ،

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

که اگر $f'(x_0) \neq 0$، نتیجه می دهد

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

پس به طور کلی می توان نوشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فرمول بالا فرمول تکرار روش نیوتن است .

طریقه دوم

در این طریقه فرض می کنیم x_0 تقریبی نزدیک به و h اختلاف آنها باشد،

یعنی

$$\alpha = x_0 + h$$

اگر بتوانیم h را به دست آوریم آن را به x_0 اضافه می کنیم و به α می رسیم . با استفاده از بسط تیلور ، داریم:

$$0 = f(\alpha) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\eta)$$

که در آن η بین α و x_0 است . با توجه به فرض ، h کوچک است . از این رو ، می توان از آخرین جمله بسط فوق صرفنظر کرد ، یعنی

$$0 \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

پس،

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لذا اگر $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ را به x_0 اضافه کنیم تقریبی از به دست می آید که آن را x_1 می نامیم .یعنی، $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ که همان فرمول (❉) است.

۲-۸-۲ مثال

۱- a عددی مثبت است و مطلوب است محاسبه تقریبی از $\sqrt{a}$ به روش نیوتن واضح است که $\sqrt{a}$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر است

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

بنابر این ، $f'(x) = 2x$ و فرمول نیوتن چنین است :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

این فرمول را می توان به صورت زیر نیز نوشت (که از نظر محاسبه راحت تر به کار می رود)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]$$

این فرمول را یونانیان قدیم نیز می شناخته و از آن استفاده می کرده اند .

به عنوان مثال اگر $a = 2$ و $x_0 = 1$ اعداد زیر ، که تقریب هایی از $\sqrt{2}$ هستند ، به دست می آیند .

$$x_1 = 1/5$$
$$x_2 = 1/416$$
$$x_3 = 1/414215686 \qquad (9D)$$
$$x_4 = 1/414213562 \qquad (9D)$$

۲ـ تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $x + \cos x = 0$ را با تقریب اولیهٔ $x_0 = -0/7$ حساب کنید .

با توجه به این که

$$f(x) = x + \cos x$$

داریم

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

و فرمول نیوتن چنین خواهد بود

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \cos x_n}{1 - \sin x_n}$$

جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ به قرار زیرند (توجه کنید که ماشین حساب در وضعیت (MODE) رادیان باشد) .

$$x_1 = -0/73943649 \qquad (8D)$$
$$x_2 = -0/73908515 \qquad (8D)$$
$$x_3 = -0/73908513 \qquad (8D)$$

لازم به ذکر است که

$$f(x_3) = 5/383 \times 10^{-9}$$

که عدد بسیار کوچکی است و مؤید این که x_3 بسیار دقیق است .

۲ـ۸ـ۳ همگرایی روش نیوتن

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است ، زیرا اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ را به صورت

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

بنویسیم و آن گاه در معادلهٔ قبلی بالا هم صدق می کند . یعنی ،

(۲ . ۲۳) $f(\alpha) = 0$ α

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

و فرمول نیوتن عبارت است از ، (امتحان کنید) .

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

بنابر این ، برای بحث در همگرایی روش نیوتن باید شرایط برقراری روش تکرار ساده را با $g(x)$ تعریف شده در (۲ . ۲۳) بررسی کنیم . برای این منظور $g'(x)$ را حساب می کنیم (فرض می کنیم تابع f مشتق دوم پیوسته دارد) .

$$g'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f''(x)f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

حال فرض می کنیم که (یعنی ، α را ریشهٔ ساده فرض می کنیم)

$$f'(\alpha) \neq 0 \qquad (۲ . ۲۴)$$

در این صورت ،

$$g'(\alpha) = 0$$

چون $g'(x)$ پیوسته است پس به ازای هر ε ، یک همسایگی از α هست به قسمی که به ازای هر x از این همسایگی

$$\left|g'(x) - g'(\alpha)\right| = \left|g'(x)\right| < \varepsilon$$

بنابر این ، اگر ε را عددی کوچکتر از یک فرض کنیم شرط قضیهٔ ۲ـ۶ـ۴ برقرار است و اگر x_0 از این همسایگی اختیار شود دنبالهٔ $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصل می شود همگراست . به علاوه ، چون $g'(\alpha)=0$ ، بنابر قضیهٔ ۲ـ۷ـ۳ ، مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ حداقل دو است .

ضمنا با توجه به قضیهٔ ۲ـ۷ـ۳ ، اگر $g''(\alpha)\neq 0$ مرتبهٔ همگرایی دقیقا دو است . در اینجا

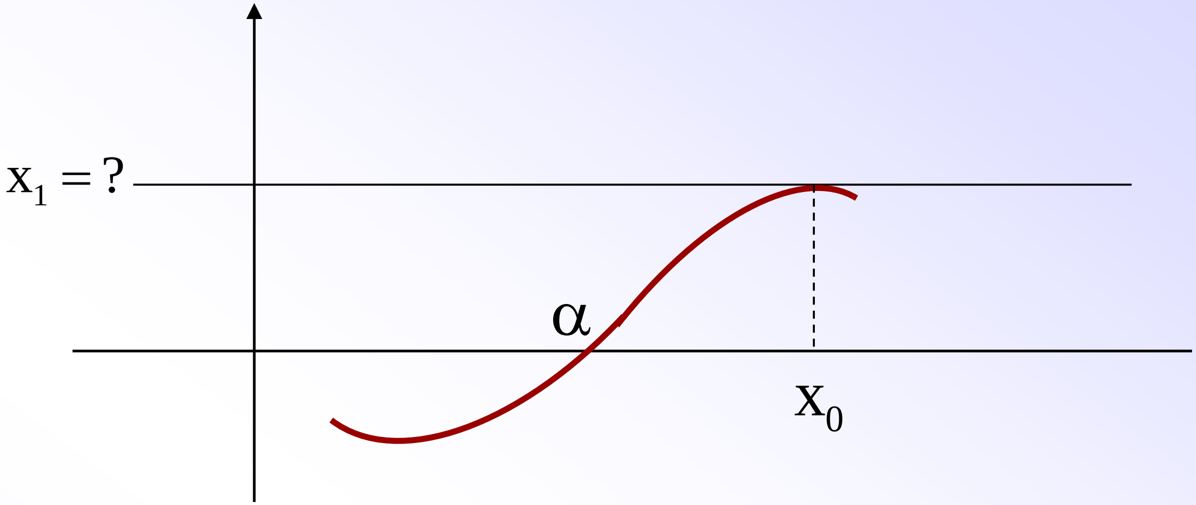
$$g''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

(تحقیق کنید)

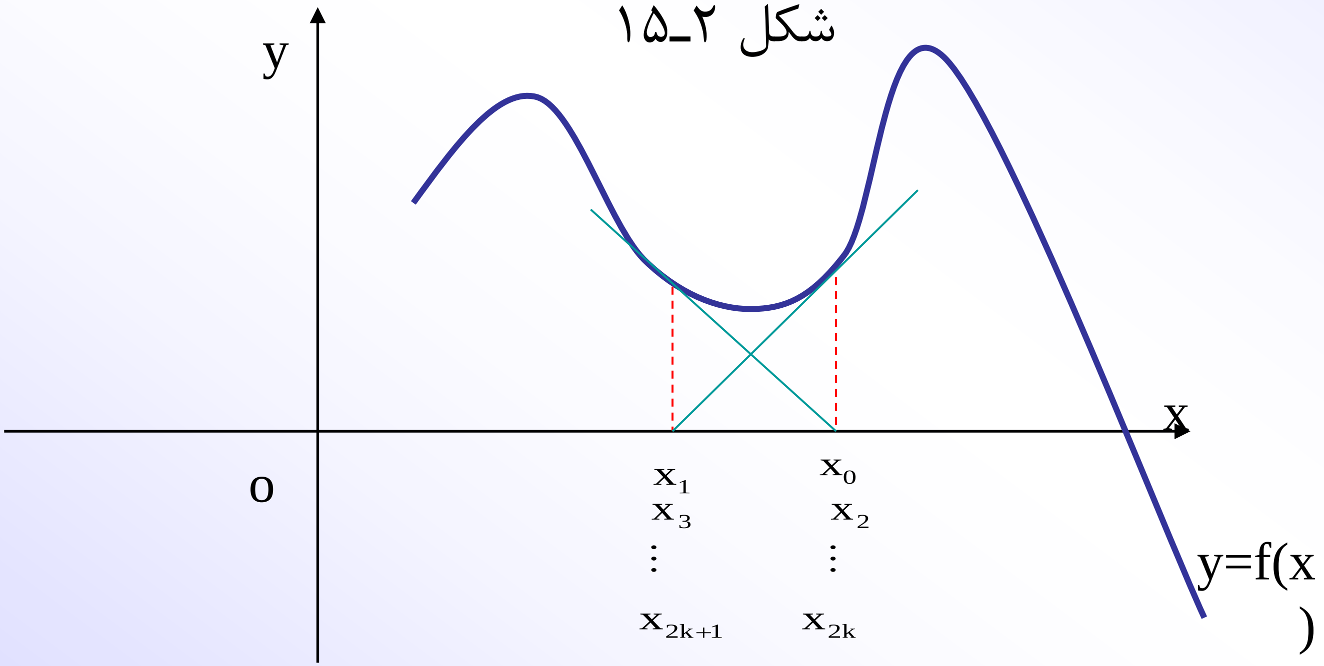
بنابر این ، با توجه به (۲ . ۲۴) ، اگر $f'(\alpha)f''(\alpha)\neq 0$ آن گاه مرتبهٔ همگرایی روش نیوتن دو است .

۲ـ۸ـ۴ خصوصیات روش نیوتن

الف) اشکال اساسی روش نیوتن آن است که ، آن همسایگی که در آن $|g'(x)|<1$، ممکن است بسیار کوچک باشد ، به عبارت دیگر باید x_0 بسیار نزدیک به α باشد تا جملات دنبالهٔ حاصل از روش نیوتن به α همگرا باشند. شکل های زیر واگرایی روش نیوتن و نوسان بین دو نقطه را نشان می دهند . برای رفع این مشکل ابتدا ، به وسیلهٔ یکی از روش های همیشه همگرا ، تقریبی نزدیک به α به دست می آورند و بعد این تقریب را x_0 می گیرند و از روش نیوتن استفاده می کنند .



شکل ۲ـ۱۵



ب) اشکال دوم روش نیوتن لزوم موجود بودن و محاسبه آن در نقاط

x_n است و این که همواره . گاهی تابع f مشتق ندارد ، که در نتیجه

امکان استفاده از فرمول نیوتن نخواهد بود ، ویا شکل $f'(x_n)$ و محاسبه آن

پیچیده است رفع این مشکل را در ۱۰-۲ بررسی می کنیم.

ج) مزیت عمده روش نیوتن ، در صورت همگرایی ،سرعت سریع آن است که

جذابیت و کاربرد آن را فزونی بخشیده است.

۲ـ۱۰ روش وتری (یا خط قاطع)

۲ـ۱۰ـ۱ فرمول روش وتری

می دانیم که

$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

بنابر این ، اگر x مقداری نزدیک به x_n باشد ، مثلا x_{n-1} ، آن گاه

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \approx f'(x_n) \qquad (۲ . ۳۱)$$

از این رو ، در فرمول نیوتن به جای $f'(x_n)$ از رابطهٔ (۲ . ۳۱) استفاده می کنیم و به دست می آوریم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

و یا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (۲ . ۳۲)$$

اگر فرمول (۲ . ۳۲) را ساده کنیم حاصل می شود :

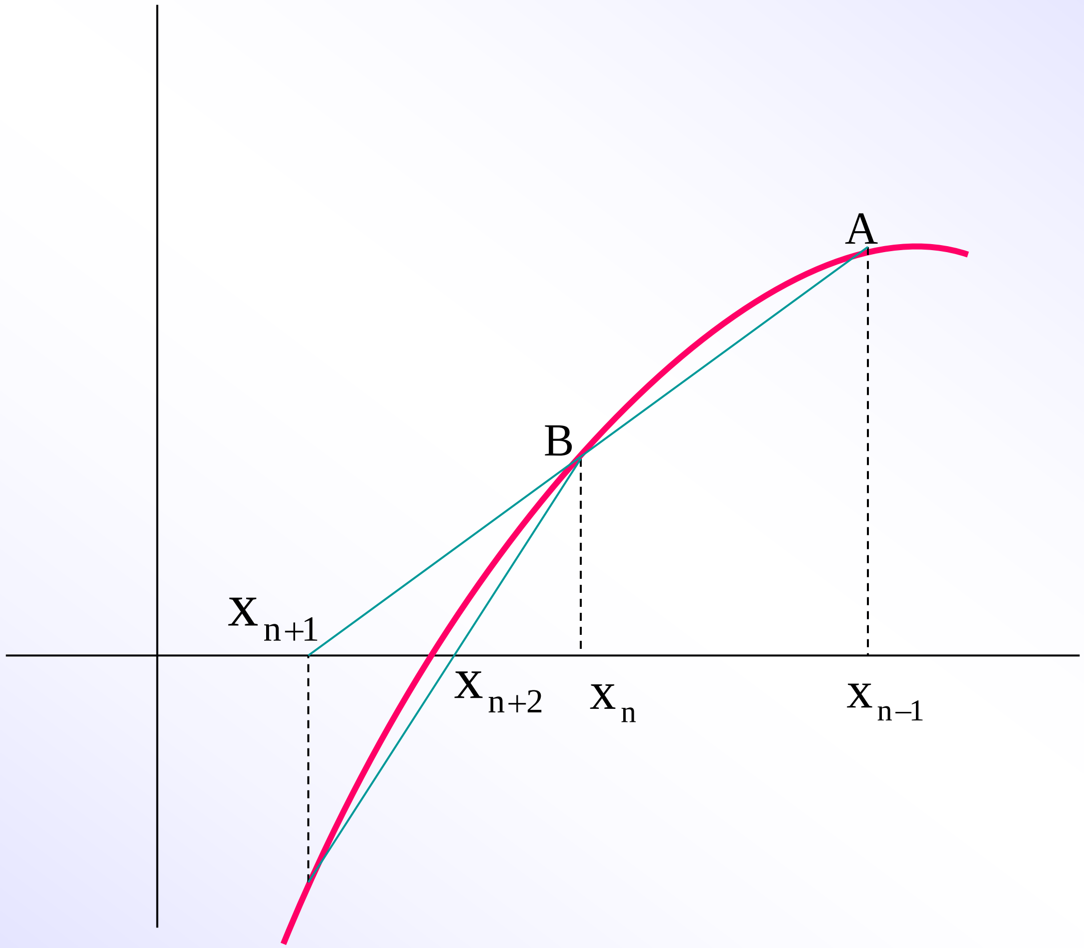
$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (۲ . ۳۳)$$

فرمول (۲ . ۳۲) یا (۲ . ۳۳) فرمول روش وتری است . برای محاسبۀ جملات دنبالۀ $\{x_n\}$ به روش وتری نیاز به دو مقدار اولیۀ x_0 و x_1 داریم و باید از فرمول (۲ . ۳۲) بقیۀ x_n ها را حساب کنیم ، زیرا فرمول (۲ . ۳۳) از نظر محاسباتی ناپایدار است .

علت این که این روش را روش وتری نامیده ایم آن است که x_{n+1} از محل برخورد خطی کـه نقاط

$$A\left|\begin{matrix} x_{n-1} \\ f(x_{n-1}) \end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix} x_n \\ f(x_n) \end{matrix}\right.$$

را به هم وصل می کند ، با محور x حاصل می شود ، شکل (۲ـ۱۷) .



شکل ۲ـ۱۷

شکل ۲ـ۱۷ نشان می دهد که روش وتری ممکن اسن همگرا نباشد . مثلا اگر خط AB موازی محور x باشد و یا آن را در دور دست قطع کند ، جایی که احتمالا جزء حوزهٔ تعریف f نیست ، x_n یا قابل محاسبه نیست و یا مفید نیست . ثابت می شود که اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، که از (۲ـ۳۲) به دست می آید ، همگرا باشد ، همگرایی آن از مرتبهٔ $p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1/618$ است . بنابر این ، این روش سرعتی کمتر از نیوتن ولی به مراتب سریع تر از دو بخشی و نابه جایی دارد .

فصل سوم

حل معادلات چند جمله ای

مقدمه

تعیین ریشه های یک معادله چند جمله ای به صورت

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

که در آن

$$a_n \neq 0 \quad , \quad n \geq 2$$

از دیر باز مورد توجه بوده است . حل مسائل زیادی منجر به پیدا کردن ریشه های یک معادله چند جمله ای می شود . مثلاًتعیین مقادیر ویژه یک ماتریس مربع ، بیان جمله عمومی دنباله هایی که به طور بازگشتی تعریف می شوند...

در این فصل مقدمات اجرای روش نیوتن را فراهم می کنیم . برای این منـــظور محاسبه یک چند جمله ای و مشتق آن را به ازای x دلخواه توضیح خواهیم داد و روش های خواص چند جمله ای ها را برای تعیین حدود و تعداد ریشـــه های حقیقی آن شرح می دهیم.

هدفهای کلی

۱. ارائه نمونه ای از مسائل کاربردی که حل آن منجر به حل یک معادله چند جمله ای می شود.

۲. ارائه روابط بین ریشه ها و ضرایب معادله ❋

۳. تعیین حدود و تعداد ریشه های حقیقی ❋

۴. محاسبه $P(x)$ و $P'(x)$ به ازای $x = a$

۵. تعیین ریشه های حقیقی معادله ❋ با دقت مطلوب

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱. در صورت لزوم از روابط بین ضرایب و ریشه ها استفاده کند.

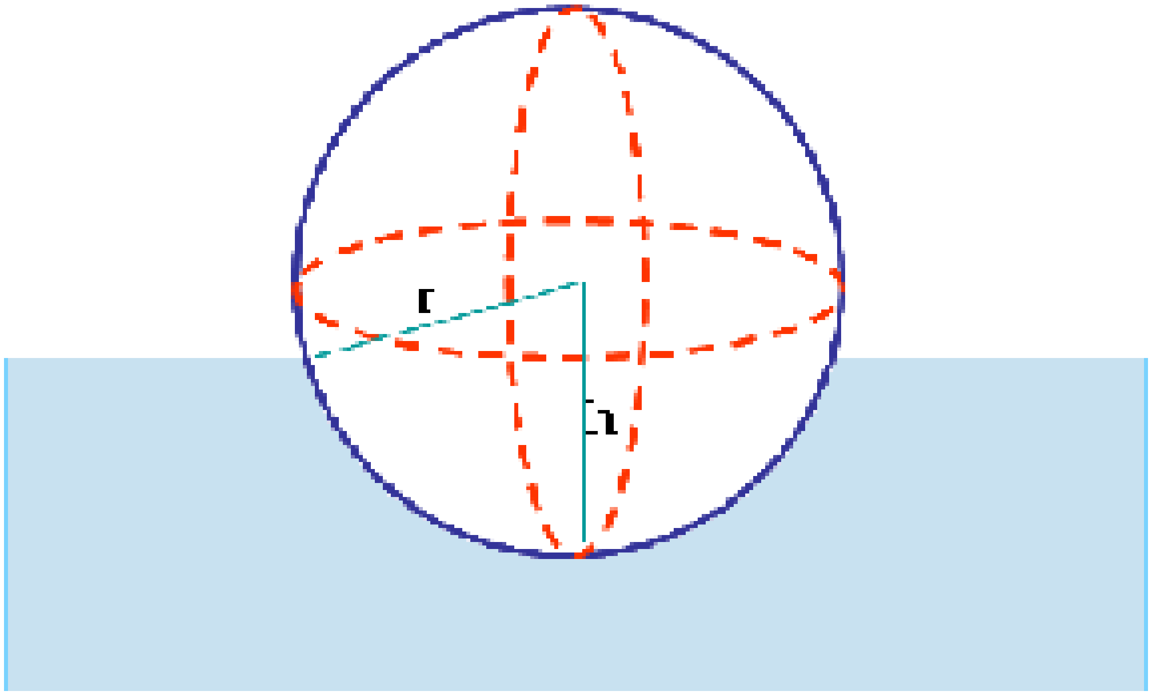
۲. حدود و تعداد ریشه های حقیقی یک معادله چند جمله ای راتعیین کند.

۳. مقدار یک چند جمله ای و مشتق آن را به ازای x دلخواه حساب کند.

۴. ریشه های حقیقی یک معادله چند جمله ای را با دقت مطلوب حساب کند.

۳-۱ یک مسئله کاربردی

فرض کنید جسمی کروی به شعاع r و وزن مخصوص 0/6 در آب قرار دارد.

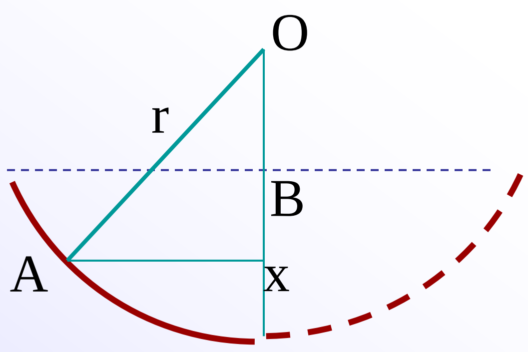


می خواهیم ارتفاع قسمتی از کره که در آب قرار دارد، یعنی h، را بر حسب r به دست آوریم. طبق قانون ارشمیدس باید داشته باشیم

وزن آب جابجا شده=وزن کره

اما، وزن آب جابجا شده برابر حجم قسمتی از جسم است که در آب قرار دارد .

برای محاسبه این حجم اگر قطعه نشات داده شده را در شکل زیرحول محور y دوران دهیم،خواهیم داشت :



$$AB^2 = AO^2 - OB^2 = r^2 - (r - x)^2$$

که در نتیجه،

حجم قسمت قرار گرفته در آب $= \int_0^h \pi\left(r^2-(r-x)^2\right)dx$

$$= \pi\int_0^h \left(2rx - x^2\right)dx$$

$$= \pi\left[rx^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi}{3}\left(3rh^2 - h^3\right)$$

و ضمناً وزن کره برابر است با

$$0/6 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

پس باید داشته باشیم

$$\frac{\pi}{3}\left(3rh^2 - h^3\right) = 2.4\frac{\pi}{3}r^3$$

که پس از ساده کردن و با فرض $R = \frac{h}{2}$ به صورت زیر در می آید

$$R^3 - 3R^2 + 2.4 = 0$$

بنابراین ، تعین نسبت h به r مستلزم تعیین ریشه ای از معادله بالاست که بین ۰ و ۲ قرار دارد.(زیرا $0 < h \leq 2r$ که در نتیجه $0 < R \leq 2$).

۲-۳ روابط بین ریشه ها وضرایب یک معادله چند جمله ای

به طور کلی یک معادله چند جمله ای درجه n عبارت است از

$$P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad *$$

که در آن $n \geq 2$, $a_n \neq 0$ چون درعمل بیشتر با معادلاتی که ضرایب آنها حقیقی است مواجه می شویم فرض می کنیم که همواره a_n حقیقی است.

اگر n = 1 جواب * عبارت است از

$$z=-\frac{a_0}{a_1}$$

از این رو ، فرض می کنیم $n \geq 2$ ضمناً اگر $a_0=0$ داریم

$$P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z = z(a_n z^{n-1} + \ldots + a_1) = 0$$

که در نتیجه $z = 0$. به علاوه ، اگر و $a_k \neq 0$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0 \qquad , \qquad (k < n)$$

داریم

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_K z^K$$

$$= z^K (a_n z^{n-K} + \dots + a_K) = 0$$

یعنی $z = 0$ ریشه تکراری مرتبه K خواهد بود و کافی است بقیه ریشه ها را از معادله

$$a_n z^{n-K} + \dots + a_K = 0$$

به دست آوریم که در آن $a_k \neq 0$. پس به طور کلی فرض می کنیم که در معادله ❊ داریم

$$a_0 \times a_n \neq 0$$

۳-۲-۱ قضیه

معادله * دارای n ریشه (حقیقی یا موهومی) است و اگر ریشه های آن را $z_n, z_{n-1}, \dots, z_1$ بنامیم داریم

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) \qquad **$$

این قضیه در جبر ثابت می شود.

ریشه ها را می توان به ترتیب زیر مرتب کرد، که با تو جه به $a_0 \times a_n \neq 0$

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$$

به علاوه ، روابط زیر بین ضرایب و ریشه ها بر قرارند (این روابط از برابری ضرایب $z^n, z^{n-1}, \dots, z^0$ در دو طرف ** به دست می آیند):

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ,$$

$$z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

۳-۲-۲مثال

اگر $P(z) = 2z^2 + 3z - 2$ آنگاه ریشه های P(z)=0 عبارت اند از $z_1 = -2 \;\; , \;\; z_2 = \frac{1}{2}$

واز اینجا ، بنا بر تعریف

$$P(z) = 2(z+2)(z - \frac{1}{2})$$

۳-۲-۳ قضیه

اگر z ریشه معادله چند جمله ای در جه n باشد $\frac{1}{z}$ ریشه معادله زیر است.

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

۳-۲-۴ مثال

ریشه های دسته معادلات زیر را حساب کنید.

$$\begin{cases} Q(z) = 10z^2 + 2z + 1 = 0 \\ P(z) = z^2 + 2z + 10 = 0 \end{cases}$$

حل:

معادله $P(z) = 0$ یک معادله درجه دوم است . بنابراین،

$$z = -1 \pm \sqrt{1-10}$$

بنابراین ، $z_1 = -1+3i$ و $z_2 = -1-3i$ که در آن $i^2 = -1$

با توجه به ارتباط بین ضرایب $P(z)$ و $Q(z)$ ریشه های $Q(z)$ عبارت اند از:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{-1+3i} = \frac{1+3i}{-10} \quad , \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-1-3i} = \frac{3i-1}{10}$$

۳-۲-۵ قضیه

اگر z یک ریشه مختلط معادله چند جمله ای در جه n باشد ، یعنی $\bar{z}$

مزدوج z ، نیز ریشه معادله چند جمله ای درجه n است.

۳-۲-۶ قضیه

اگر درجه $P(z)$ فرد باشد معادله $P(z) = 0$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

۳-۲-۷ قضیه

اگر z ریشه $P(z) = 0$ باشد $-z$ ریشه $P(-z) = 0$ است.

۳-۲-۸ قضیه

اگر در چند جمله ای $P(z)$ تنها توانهای زوج z موجود باشند یعنی

$$P(z) = a_{2k}z^{2k} + a_{2k-2}z^{2k-2} + \ldots + a_2z^2 + a_0$$

عداد ریشه های حقیقی معادله چند جمله ای عددی زوج است (توجه کنید که

ریشه حقیقی وجود نداشته باشد).

۳-۲-۹ قضیه

اگر $a=\frac{r}{s}$ ، که درآن r و s صحیح و نسبت به هم اول اند، ریشه معادله

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0$$

باشد و $a_n, a_{n-1},\dots, a_1, a_0$ جملگی اعداد صحیح باشند آنگاه $r|a_0$ و $s|a_n$.

به ویژه اگر $|a_n|=1$ آنگاه ریشه های حقیقی P(x)=0 ، در صورت وجود ، صحیح هستند.

۳-۲-۱۰ قاعده علامات دکارت

اگر m تغییر علامات در جملات متوالی $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$

و k تعداد ریشه هی معادله P(z)=0 باشد آنگاه $k \le m$ و m-k عددی زوج است.

۳-۲-۱۱ نتیجه

اگر l تعداد تغییر علامت در جملات ضرایب P(-z) و s تعداد ریشه های منفی

P(z) =0 باشد ، در این صورت $s \le l$ و l- s عددی زوج است.

۳-۲-۱۲مثال

تعداد ریشه های حقیقی معادله

$$P(z) = z^3 - z^2 - 10z = 0$$

را، در صورت امکان ، به قاعده علامات دکارت تعیین کنید.

حل:

تعدا تغییر علامت در ضرایب P(z) برابر ۲ است ازاین رو ، این معادله دارای

۲ یا ۰ ریشه مثبت است . همچنین $P(-z) = -z^3 - z^2 + 10z + 4$

که تعداد تغییر علامت ضرایب آن یک است . یعنی معادله حتماً دارای یک

ریشه منفی است ولی در مورد ریشه های مثبت آن ، قاعده علامات دکارت

نتیجه ای به دست نمی دهد!

۳-۳ تعیین حدود ریشه های $P(z) = 0$

در فصل دوم مشاهده شد که برای تعیین ریشه های یک معادله لازم است حدود ریشه ها و گاهی تقریب خوبی از آنها به گونه ای معین شود. در این قسمت مشاهده خواهید کرد که ریشه های معادله چند جمله ای محدود هستند و به سادگی کران بالا و پایین برای آنها به دست می آید .

۳-۳-۱ قضیه

اگر z ریشه معادله

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

باشد (a_iها حقیقی هستند)آنگاه

$$|z| \le |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1 = M$$

۳-۳-۲ نتیجه

اگر z ریشه دلخواهی از معادله چند جمله ای درجه n باشد

$$|z| \le \frac{M'}{|a_n|}$$

که در آن

$$M' = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$$

۳-۳-۳ قضیه

اگر تمام ریشه های معادله چند جمله ای درجه n حقیقی و ریشه ها $z_n, \ldots, z_1$ باشند به طوری که

$$0 < |z_1| \leq \ldots \leq |z_n|$$

آنگاه

$$z_n^2 < \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n} = R$$

و

$$z_1^2 > \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}} = r$$

۳-۳-۴ نتیجه

اگر تمام ریشه های معادله چند جمله ای درجه n حقیقی باشند

$$r < z^2_i < R \qquad , \quad i = 1,2,3,\ldots, n$$

یعنی ، مربع ریشه های چند جمله ای درجه n به R و r محدودند.

۳-۳-۵ نتیجه

اگر P(z) چنان بیاشد که R و r منفی باشد معادله P(z)=0 حتماً ریشه مختلط دارد. به عبارت دیگر ، شرط لازم برای آنکه معادله P(z) = 0 ریشه مخـــــتلط نداشته باشد آن است که R و r هردو مثبت باشند، ولی این شرط کافی نیست.

همچنین اگر $r > 0$ و R ولی $r \geq R$ معادله حتماً ریشه مختلط دارد .

۳-۳-۶ مثال

الف) می دانیم که معادله $x^3-5x^2+8x-4=0$ فقط ریشه های حقیقی دارد حدود ریشه ها را تعیین کنید.

حل:

بنابر قضیه ۳-۳-۳

$$r > \frac{1}{\left(\frac{-8}{4}\right)^2 - 2\times\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} \qquad , \qquad R = 5^2 - 2\times 8 = 9$$

بنابراین،

$$\frac{2}{3} < z^2{}_i < 9$$

ب) نشان دهید که شرط $R > 0$ و r برای عدم وجود ریشه مختلط برای معادله چند جمله ای درجه n کافی نیست.

حل:

معادله $z^3 + 3z + 4 = 0$ را در نظر می گیریم ، مقادیر R و r عبارت اند از

$$R = (-3)^2 - 2\times 4 = 1 > 0 \quad , \quad r > \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} = 16 > 0$$

همان گونه که مشاهده می شود $r > 0$ و R اما ریشه های مذکور عبارت اند از

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$$

یعنی ، با وجود اینکه r و R هر دو مثبت هستند معادله ریشه مختلط دارد.

۴-۳ محاسبه $P(z)$ و $P'(z)$ به ازای $z = a$

اگر منظور محاسبه $P(z)$ به ازای $z = a$ باشد از طریق معمولی ، یعنی محاسبه

تک تک جملات موجود در $P(z)$ و بعد جمع کردن آنها ، باید $\frac{n(n+1)}{2}$ ضرب

و n جمع انجام دهیم .(مثلاً برای محاسبه $a \times a^{n}$ باید n ضرب انجام داد.چگونه؟)

در ادامه روشی ارائه می کنیم که فقط به n ضرب و n جمع نیازمند و با طبیعت

کامپیوتر به عنوان وسیله ای سریع برای انجام کارهای تکراری سازگار است.

قبلاً متذکر می شویم که اگر

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

آنگاه

$$P(a) = ((a_3 \times a + a_2) \times a + a_1) \times a + a_0$$

اگر عملیات را از داخلترین پرانتز شروع کنید مشاهده می شود که به ۳جمع و به

۳ ضرب نیاز داریم . در صورتی که برای محاسبه مستقیم

$$a_3a^3 + a_2a^2 + a_1a + a_0$$

۶ ضرب و ۳ جمع باید انجام داد .

۳-۴-۱ قضیه

اگر

$$P(z) = (z-a)(b_nz^{n-1} + b_{n-1}z^{n-2} + \ldots + b_2z + b_1) + b_0$$

آنگاه

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b = ab_{i+1} + a_i \end{cases} \qquad , i = n-1, n-2, \ldots, 0$$

و

$$P(a) = b_0$$

۳-۴-۲ مثال

اگر $P(x)=2x^3-x^2-6$ مطلوب است محاسبه $P(1.2)$.

حل:

جدول زیر نحوه به دست آوردن $P(1.2)$ را به خوبی نشان می دهد: (توجه داشته باشید که ضریب هر توانی از x که در $P(x)$ نیست صفر منظور می شود).

1.2	2	-1	0	-6
	+ 0	2.4	1.68	2.016
	2	1.4	1.68	-3.984

بنابراین ، $P(1.2) = -3.984$. ضمناً می توان نوشت

$$2x^3 - x^2 - 6 = (x - 1.2)(2x + 1.4x + 1.68) - 3.984$$

قضیه زیر را با استفاده از ۳-۴-۱ به دست می آید.

۳-۴-۳ قضیه

اگر $P(z) = (z - a)q(z) + b_0$ آنگاه $P'(a) = q(a)$.

۳-۴-۴ مثال

اگر $P(z)=3z^3-4z+8$ مطلوب است محاسبه $P(2)$ و $P'(2)$

حل:

جدول زیر مراحل محاسبه را نشان می دهد:

2		3	0	-4	8
	+	0	6	12	16
		3	6	8	24=$P(2)$
2	+	0	6	24	
		3	12		32= $P'(2)$

۳-۵ تعیین ریشه های حقیقی $P(z)=0$ با دقت مطلوب

برای تعیین ریشه های حقیقی معادله

$$P(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

از کلیه مطالب گفته شده می توان استفاده کرد. اگر $a_0=0$ ابتدا ریشه های صفر را بیرون می کشیم و ک معادله چند جمله ای با جمله ثابت به دست می آوریم . سپس بنابر قضیه ۳-۲-۹ ریشه های گویا را ، در صورت وجود، به دست می آوریم و بااستفاده از روش هورنر به یک چند جمله ای میرسیم که ریشه های آن اصم یا مختلط هستند.

برای محاسبه ریشه های حقیقی و اصم از روش نیوتن ، که همگرایی سریع دارد، استفاده می کنیم . اما این روش نیاز به مقدار اولیه ای از ریشه ها دارد.

با توجه به قضایای ۳-۳-۱ ، ۳-۳-۳ و نتایج آنها حدود این ریشه ها معین و ریشه ها را با شروع از بزرگترین ، یکی یکی به دست می آوریم تا اینکه بـــه یک چند جمله ای برسیم که تمام ریشه هایآن مختلط باشد . ریشـــــه های مختلط به **روش برستو** قابل محاسبه اند.

وقتی x_0 به دست آمد محاسبه جملات $\{x_n\}$ با رابطه زیر انجام می شـــود

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \qquad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$ *

توجه داشته باشید که $P(x_n)$ و $P'(x_n)$ به روش هورنر به سادگی محاسبه می شوند.البته برای n های بزرگ باید از ماشین حساب یا کامپیوتر استفاده کرد.

۳-۵-۱مثال

ریشه های معادله $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ را بدست آورید.

حل:

چون درجه چند جمله ای فرد است پس حداقل یک ریشه حقیقی موجود است

با توجه به اینکه

$$P(0) = -1 < 0 \qquad , \qquad P(1) = 3 > 0$$

یک ریشه حقیقی بین ۰ و ۱ است. قرار می دهیم $x_0 = 0.5$ و با استفاده از روش

هورنر چند جمله را از فرمول ❉ حساب می کنیم.

		1	1	2	-1
0. 5	+	0	0. 5	0.75	1. 375
		1	1. 5	2. 75	0. 375=P(0. 5)
0. 5	+	0	0. 5	1	
		1	2	3. 75 = $P'(0.5)$	

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.375}{3.75} = 0.4$$

		1	1	2	-1
0. 4	+	0	0. 4	0. 56	1. 024
		1	1. 4	2. 56	0. 024= P(0. 4)
0. 4	+	0	0. 4	0. 72	
		1	1 . 8	3. 28= $P'(0.4)$	

$$x_2 = 0.4 - \frac{0.024}{3.28} = 0.3927 \quad (4D)$$

این جواب تا سه رقم اعشاردقیق است و استفاده مجدد از روش هورنر دقت آن را

نشان می دهد .

از جدول اخیر معلوم می شود که دو ریشه دیگر مختلط هستند(چرا؟).

		1	1	2	-1
0. 3927	+	0	0. 3927	0. 5469	1. 0001676
		1	1. 3927	2. 5469	0. 0001676

زیرا داریم

$$(x^3 + x^2 + 2x - 1) \approx (x - 0.3927)(x^2 + 1.3927x + 2.5469)$$

فصل چهارم

درونیابی

مقدمه

در ریاضیات محض ، بخصوص در آنالیز ریاضی ، معمولا با توابعی سرو کار داریم که با یک یا چندضابطه تعریف شده اند. یعنی ، به ازای هرمقدار متغیر ،دستوری برای تعیین مقدارتابع داده شده است . اما ، درعمل به ندرت باچنین وضعی روبه رو می شویم واکثراتوابعی که بایدمورد بررسی قرارگیرند مقدارشان به ازای بعضی از مقادیر متغیرو آن هم از طریق آزمایش و یا انداز ه گیری به زحمت قابل تعیین است.

به بیان دقیق مقادیر تابع f به ازای نقاط دو به دو متمایز

به ترتیب عبارتند از:

$x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ $\qquad$ $f_0 , f_1 , f_2 , \ldots , f_n$

یک چنین تابعی را تابع جدولی نامیم . نمو نه هایی از این توابع را می شناسید،توابع مثلثاتی وتابع لگاریتم که مقدار آنها به ازای بعضی از مقادیر متغیر درجدولهایی درج شده است .

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x_0 < x < x_n$ و $i = 1,2,\ldots,n-1$

$x \neq x_i$

وبرونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0 , x_n]$

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با مفاهیم فوق کاربردهای عملی آنها را در تخمین جمعیت در سال های آینده ویا برآورد توابع مختلف دیگر خواهیم دید .

هدفهای کلی

۱- آشنایی با مفاهیم درونیابی و برونیابی

۲- معرفی چند جمله ای درونیاب

۳- تعیین چند جمله ای درونیاب به روش لاگرانژ و بیان معایب این روش

۴- تعیین چند جمله ای درونیاب به روش تفاضلات تقسیم شده و مزایای آن

۵- تعیین خطای چند جمله ای درونیاب و روش مینیمم کردن آن

۶- معرفی تفاضلات متناهی و کاربرد آنها در تعیین درجه چندجمله ای درونیاب و سرعت بخشیدن به همگرایی دنباله های همگرا

۷- ارائه فرمولهای نیوتن، برای چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات متناهی

۸- معرفی درونیابی معکوس وکاربرد آن

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱- مفاهیم درونیابی و برونیابی را بیان وکاربردهایی از آنها را ارائه کند .

۲- چند جمله ای درونیاب مربوط به یک تابع جدولی را به روشهای گوناگون حساب کنید.

۳- کران بالایی برای خطای چند جمله ای درونیاب حساب کند .

۴- جدول تفاضلات یک تابع جدولی را تشکیل و اطلاعات لازم را از آن کسب و چند جمله ای درونیاب را از آن به دست آورد .

۱-۴ مفهوم درونیابی

درریاضیات از دیرباز توابع جدولی ، یعنی توابعی که مقادیرآنهادرنقاطی ازحوزه

تعریف آنها در یک جدول ثبت شده است ، مورد استفاده قرار می گرفته اند .

همه با جدول مقادیرتوابع sin ، cos و tg و cotg به ازای ۰،۱،۲،...،۴۵ درجه

آشناهستید ، همچنین باجدول مانتیس لگاریتم اعداد . آنچه دردبیرستان برای

تعیین ، مثلا سینوس۳۷درجه و۴۰دقیقه انجام می دهید درونیابی خطی است

که در اینجا آنرا بررسی می کنیم . باپیدایش ماسین حساب وکامپیوتر جدولهای

مذکور دیگر به کار نمی روند و درونیابی بیشتر

هنر شناخت معانی ومفاهیم مستتر در یک جدول

است . یکی از این معانی ، تخمین مقدار یک تابع به ازای مقداری از x است که در

جدول نیست ، ولی بین نقاط جدولی است . این همان مفهوم درونیابی است .

برای تخمین $f(x)$ وقتی f باجدول زیر داده شده است

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	…	f_n

راههای متفاوتی وجود دارد . یکی از راههای نسبتا ساده این است که یک چند جمله ای

مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدارآن در x_i همان f_i باشد، البته به ازای

$i=0,1,2,...,n$ یعنی داشته باشیم ❊ $P(x_i)= f_i \quad i=0,1,2,...,n$

وبعد به جای $f(x)$ در بازه $[x_0 , x_n]$ با $P(x)$ کار کنیم . اکنون سوالاتی به صورت زیر مطرح می شود :

الف) چرا یک چند جمله ای پیدا می کنیم ؟ مگر چندجمله ای چه خصوصیتی داردکه دیگر توابع ندارند؟

ب) آیا یک چند جمله ای که در ❊ صدق کند همیشه وجود دارد؟ و در صورت وجود منحصر به فرد است؟

ج) آیاتعیین این چندجمله ای برای n های بزرگ عملی است ؟

درپاسخ به سوال (الف) ، همه می دانیم که محاسبه یک چندجمله ای به ازای مقداری از x_iبسیار ساده است (روش هورنر از فصل سوم) . همچنین محاسبه مشتق و انتگرال توابع چندجمله ای و حتی تعیین ریشه های یک معادله چندجمله ای مشکل نیست . جالب این که ، درصورت متمایزبودن نقاط ، جواب سوال(ب)مثبت است و همیشه یک چندجمله ای منحصربه فردوجوددارد و راههای ساده ای برای تعیین آن می شناسیم . این مطالب را دردیگربخشهای این فصل موردبررسی قرارخواهیم داد .

۲-۴ چند جمله ای های لاگرانژ

یکی ازروشهای تعیین یک چندجمله ای حداکثراز درجه n که در * صدق کند ، روش

لاگرانژ است . در این روش فرض می کنیم $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ ها، یک

چندجمله ای درجه n باشند وداشته باشیم

$$P(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \ldots + L_j(x) f_j + \ldots + L_n(x) f_n$$

و سعی می کنیم $L_j(x)$ ها را چنان تعیین کنیم ک

$$P(x_i) = f_i \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

برای این منظورمی گوییم به ازای $i=0,1,2,\dots,n$ باید داشته باشیم

$$P(x_i)=L_0(x_i)f_0+\dots+L_j(x_i)f_j+\dots+L_n(x_i)f_n$$ ❊❊

لذا کافی است (ودرصورت مستقل بودن $L_j(x)$ ها از یکدیگرلازم است) داشته باشیم

$$\begin{cases} L_j(x_i)=0 \\ L_j(x_j)=1 \end{cases}$$ و $i \neq j$ ❊❊❊

اما ، تابع زیر

(۴,۴)

$$(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)$$

به ازای $x_n,\dots,x_{j+1},x_{j-1},\dots,x_1,x_0$ صفر است ، یعنی به ازای x_i هایی که

$i \neq j$ ، کافی است کاری کنیم که مقدار این تابع به ازای x_j یک شود و این کار با

تقسیم تابع مندرج در (۴,۴) بر عدد

$$(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)$$

امکان پذیر است. به عبارت دیگر

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)} \qquad (۵,۴)$$

به سادگی می توانید آزمایش کنید که شرایط ❊❊❊ برقرارند. چندجمله ایهای درجه

n که به وسیله (۵,۴) بیان می شوند به چندجمله ایهای لاگرانژ معروف اند.

۴-۲-۱ مثال

چندجمله ای $P_2(x)$ که مربوط به تابع جدولی زیر است حساب کنید.

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل:

در این مثال $n=2$ و در نتیجه چند جمله ایهای لاگرانژ از درجه دو هستند .

چند جمله ایهای لاگرانژ به قرار زیرند:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)\,(x-1)}{(0+1)\,(0-1)}=\frac{x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)}=\frac{(x+1)\,(x-0)}{(1+1)\,(1-0)}=\frac{x^2+x}{2}$$

از این رو، بنابر فرمول داریم

$$P(x)=1\times L_0(x)+1\times L_1(x)+3\times L_2(x)=\frac{x^2-x}{2}-(x^2-1)+\frac{3(x^2+x)}{2}$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

تحقیق کنیدکه $L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)=1$

تذکر: چندجمله ای $P(x)$ را می توان به روش ضرایب مجهول نیز به دست آورد.

به این معنا که فرض می کنیم

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

و قرار می دهیم $P(1)=3$ و $P(0)=1$ و $P(-1)=1$

که درنتیجه یک دستگاه سه معادله ، سه مجهول حاصل می شود که جواب آن $a=b=c=1$

خواهد بود (امتحان کنید) . امادرعمل n می تواند بزرگ باشد و نقاط x_i نزدیک به هم

، که درنتیجه حل یک دستگاه شامل $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهول را با اشکالاتی

مواجه می کند.

۴-۲-۲ مثال

بااضافه کردن نقطه (۲,۷) به تابع جدولی مثال (۴-۲-۱) مجددا چندجمله ای

$P(x)$ را حساب کنید . به عبارت دیگر، چندجمله ای مربوط به جدول زیر را حساب کنید.

	۱-	۰	۱	۲
x_i	۱	۱	۳	۷
f_i				

حل:

در این مثال $n = 3$ و چند جمله ایهای لاگرانژ همه از درجه ۳ هستند . این چند جمله ایها عبارت اند از:

$$L_0(x)=\frac{(x-0)\,(x-1)\,(x-2)}{(-1-0)\,(-1-1)\,(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x+1)\,(x-1)\,(x-2)}{(0+1)\,(0-1)\,(0-2)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)\,(1-0)\,(1-2)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x+1)\,(x-0)\,(x-1)}{(2+1)\,(2-0)(2-1)}=\frac{x^3-x}{6}$$

درنتیجه چندجمله ای $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) + 7 \times L_3(x)$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + \frac{3(x^3 - x^2 - 2x)}{-2} + \frac{7(x^3 - x)}{6}$$

که پس ازساده کردن نتیجه می شود

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

ضمنا ازطریق محاسبه معلوم می شودکه

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = 1$$

مشاهده می شود که $P(x)$ از درجه ۲ است ولی $L_i(x)$ ها از درجه ۳ هستند. ضمنا از محاسبات مربوط به مثال (۴-۲-۱) کمتر استفاده شد .

یعنی، با اضافه کردن یک نقطه به جدول باید تقریبا تمام عملیات را از سرگرفت. حجم عملیات نیزبا افزایش n به سرعت بالا می رود.درضمن درجه چندجمله ای درونیاب قبل از تعیین کامل آن معلوم نمی شود. قضیه زیر نشان می دهد که چندجمله ای $P(x)$ که در صدق می کند منحصر به فرد است.

۴-۲-۳ قضیه

فقط یک چند جمله ای $P(x)$، حداکثر از درجه n ، وجود دارد که در شرط زیر صدق می کند:

$$P(x_i) = f_i \quad \text{و} \quad i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (۶,۴)$$

۴-۲-۴ تعریف

چند جمله ای منحصر به فرد $P_n(x)$ که در (۶,۴) صدق می کند چند جمله ای درونیاب یا چند جمله ای هم محل تابع f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ نامیده می شود

روش لاگرانژ برای تعیین چندجمله ای درونیاب تنها از لحاظ نظری مورد توجه است ولی همان گونه که در مثال ۴-۲-۲ نشان داده شد از لحاظ عددی معایب زیادی است .

۴-۲-۵ معایب روش لاگرانژ

۱- محاسبات این روش ، وقتی n خیلی هم بزرگ نباشد ، زیاد است و خودکارکردن عملیات نیز ساده نیست .(به این مطلب فکر کنید که چگونه می توان ضرایب توان های مختلف x رادرهر یک از چندجمله ایهای لاگرانژ باکامپیوتر حساب کرد).

۲- درجه چند جمله ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می شود و با اضافه کردن یک یا چندنقطه به نقاط جدولی باید تقریبا تمام عملیات راaز سرگرفت.

۳- چون چند جمله ای درونیاب به تدریج حساب نمی شود این روش را باید با احتیاط کامل به کار برد (مثال زیر را مطالعه کنید).

۴-۲-۶ مثال

جدول مربوط به تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ داده شده است مطلوب است تخمین $\sqrt[3]{20}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ .

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

حل :

باتوجه به تعریف چندجمله ایهای لاگرانژ داریم(توجه کنیدکه $f_0=0$ و $L_0(x)\times f_0=0$)

$$P(x)=\frac{x\,(x-8)\,(x-27)\,(x-64)}{1\,(-7)\,(-26)\,(-63)}\times 1+\frac{x\,(x-1)\,(x-27)\,(x-64)}{8\,(7)\,(-19)\,(-56)}\times 2$$

$$+\frac{x(x-1)\,(x-8)\,(x-64)}{27(26)\,(19)\,(-37)}\times 3+\frac{x(x-1)\,(x-8)\,(x-27)}{64(63)\,(56)\,(37)}\times 4$$

برای تخمین $\sqrt[3]{20}$ به جای X قرار می دهیم ۲۰ خواهیم داشت

$$\sqrt[3]{20}\cong P(20)=-1/3139 \qquad (4D)$$

با رسم منحنی مشاهده می شود برآورد $\sqrt[3]{20}$ منفی است! علت چیست ؟

$$y=\sqrt[3]{x}$$

در فاصله [۸,۲۷] معلوم می شود که شکل منحنی نزدیک به یک خط راست است .

لذا ، اگر در این فاصله چند جمله ای درونیاب درجه اول را به دست آوریم حاصل می شود

$$P_1(x)=\frac{x-27}{8-27}\times 2+\frac{x-8}{27-8}\times 3$$

وبه دست می آید

$$\sqrt[3]{20}\cong P_1(20)=\frac{14}{19}+\frac{36}{19}=\frac{50}{19}=2/6316$$

که از $\sqrt[3]{20}=2/7144(4D)$ خیلی دور نیست .

۳-۴ روش تفاضلات نیوتن

می دانیم که یک چندجمله ای را به طرق مختلف می توان نوشت . درفرمـــــول (۲,۴)، برای چند جمله ای درونیاب ، این چند جمله ای بر حسب ترکیب خطی خاصی از چند جمله ایهای لاگرانژ نوشته شده است . ولی می توان n چند جمله ای مستقل خطی دلخواه در نظر گرفت و $P(x)$ را بر حسب ترکیبی خطی از آنها نوشت . اگر چند جمله ایهای زیر را در نظر بگیرید .

$$1,(x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\ldots,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

می توان نشان داد که این چند جمله ایها مستقل خطی هستند . اکنون فرض کنید $P(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ باشد و

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $P(x_i)=f_i$ می توان a_i ها را به دست آورد.

مثلا با قرار دادن $x=x_0$ داریم $P(x_0)=a_0$

و چون باید $P(x_0)=f_0$ پس ،

$$a_0=f_0 \qquad (۷,۴)$$

با قرار دادن $x=x_1$ به دست می آوریم

$$P(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

که با توجه به (۷,۴) واینکه $P_1(x_1) = f_1$ نتیجه می شود

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

و به همین ترتیب بقیه a_i ها بر حسب نقاط و f_i ها به دست می آیند . نیوتن با توجه به مقادیری که برای ضرایب به دست می آیند تفاضلات تقسیم شده را معرفی ویک فرمول بازگشتی برای محاسبه آنها ارائه کرد .

۴-۳-۱ تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \ldots, f_n$ مقادیر تابع f

دراین نقاط باشد.

تفاضلات تقسیم شده اول بین x_i و x_{i+1} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

بنابراین

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \qquad ,$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده دوم بین x_i , x_{i+1} و x_{i+2} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

به عنوان مثال

$$f[x_0, x, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده n ام بین نقاط $x_0, x_1, ..., x_n$ عبارت است از:

$$f[x_0, x, ..., x_n] = \frac{f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] - f[x_1, x_2, ..., x_n]}{x_0 - x_n}$$

همچنین اگر x نقطه دلخواهی از (x_0, x_n) باشد و

$$x \neq x_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., n-1$$

تفاضلات تقسیم شده بین $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ عبارت است از:

$$f[x, x_0, x, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

۴-۳-۲ مثال

با استفاده از جدول ذیل تفاضلات تقسیم شده مربوط به تابع f را حساب کنید.

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	-1	1	1	5	19

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	تفاضلات سوم	تفاضلات چهارم
-1	-1				
		$\frac{-1-1}{-1-0}=2$			
			$\frac{2-0}{-1-1}=-1$		
0	1			$\frac{-1-2}{-1-2}=1$	
		$\frac{1-1}{0-1}=0$			$\frac{-1-1}{-1-3}=0$
			$\frac{0-4}{0-2}=2$		
1	1			$\frac{2-5}{0-3}=1$	
		$\frac{1-5}{1-2}=4$			
			$\frac{4-14}{1-3}=5$		
2	5				
		$\frac{5-19}{2-3}=14$			
3	19				

جدول ۱

خلاصه جدول بالا چنین است :(پس از حل چند تمرین نیازی به نوشتن کسرها نیست.)

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-1	-1				
		2			
0	1		-1		
				1	
		0			0
1	1		2		
		4		1	
2	5		5		
		14			
3	19				

جدول ۲

۴-۳-۳ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید . سپس با اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل:

با توجه به مثال قبل داریم:

(ضمناً زیر اعدادی که پس از اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ حاصل می شوند خط کشیده شده است.)

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	1			
		0		
0	1		1	
		2		$\underline{0}$
1	3		$\underline{1}$	
		$\underline{4}$		
2	7			

جدول ۳

قضیه زیر نشان می دهد که از جدول تفاضلات می توان درجه چند جمله ای درونیاب را ، قبل از به دست آوردن آن ، معین کرد. مثلاً جدول (۲) نشـــان می دهد که چند جمله ای درونیاب f از درجه ۳ است . ضـــمناً جدول (۳) نشان می دهد که با اضافه کردن نقطه (2, 7) درجه چند جمله ای درونیاب تغییر نمی کند و برابر ۲ است.

۴-۳-۴ قضیه (فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن)

چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ عبارت از

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

۴-۳-۵ مثال

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفا ضلات تقسیم شده به دست آورید و $f(\frac{1}{2})$ را بر آورد کنید.

x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	0	7	26

حل:

باتوجه به جدول بالا جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می دهیم.

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	-2			
		1		
1	0		2	
		7		1
2	7		6	
		19		
3	26			

از این رو ، بنابر تعاریف برای چند جمله ای درونیاب ، داریم

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -2+(x+1)\times 1+(x+1)(x-1)\times 2+(x+1)(x-1)(x-2)\times 1 \\
&= -2+x+1+2x^2-2+x^3-2x^2-x+2
\end{aligned}
$$

که در نتیجه،

$$P(x)=x^3-1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\approx P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}$$

۴ـ۴ خطای چند جمله ای درونیاب

تـا کنون دو روش برای تعیین چند جملـه ای درونیاب یک تـابع در تعـدادی نقطه ارایه کردهایم . در این قسمت می خواهیم خطای $P(x)$ و یا به عبارت دیگر را حساب کنیم . واضح است که خطای مـطلق $|f(x)-P(x)|$ نـشان خواهد داد که $P(x)$ به ازای هر x از حوزهٔ تعریف f ، $P(x)$ تـقریب خـوبی برای این تابع هست یا نیست ،

ضمناًراههای مینیمم سازی خطای مطلق $P(x)$ را نیز تحقیق خواهیم کرد .

۴-۴-۲ قضیه

اگر $P(x)$ چند جمله ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز x_0 ، x_1 ، $\dots$ ، x_n و f دارای مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ باشد آن گاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_x)$$

که در آن η_x نقطه ای در $[x_0, x_n]$ است که در حالت کلی به x بستگی دارد .

۴-۴-۳ نتیجه

با شرایط قضیهٔ ۴-۴-۲ داریم

$$\left|f(x)-P(x)\right| \le \left|(x-x_0)\ \dots\ (x-x_n)\right| \times \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

که در آن M_{n+1} یک کران بالا برای $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ بر $[(x_0, x_n)]$ است. یـعنی ،

بـرای هـر x از $[(x_0, x_n)]$ ، $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$. در عـمل ، به دلیل مشخص

نبودن محل ، از (۴-۴-۳) استفاده می شود .

در اینجا با چند مثال کاربرد قضیهٔ ۴- ۴- ۲ و نتیجهٔ آن را توضیح می دهیم

مثال ۴-۴-۴

چند جمله ای درونیاب $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ را در نقاط $x_0=0$ و $x_1=1$ به دست آورید و کران بالایی برای $\left|f(x)-P(x)\right|$ حساب کنید . مقدار $\left|f(\frac{1}{2})-P(\frac{1}{2})\right|$ را با کران بالا در $x=\frac{1}{2}$ مقایسه کنید .

حل:

جدول مربوط به تابع عبارت است از :

	f_i	تفاضل اول
0	1	
		-1
1	0	

برای این منظور مشتقات مرتبهٔ اول و دوم تابع f راحساب می کنیم .

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi x}{2}$$

درنتیجه

$$|f''(x)| \le \frac{\pi^2}{4} = M_2$$

پس ، بنابر ۴-۴-۳ ،

$$|f(x) - P(x)| \le |(x-0)(x-1)| \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2!} = \frac{\pi^2}{8}|x^2 - x|$$

مقدار کران بالا به ازای $x = \frac{1}{2}$ برابر است با

$$\frac{\pi^2}{8} \times \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\pi^2}{32} = 0/31 \quad (2D)$$

که با مقدار واقعی خطا ، یعنی ۰/۲۱ ، ۰/۱ اختلاف دارد و بیانگر خوب نــبودن

تقریب یا نامناسب بودن چندجمله ای درجهٔ اول به عنوان یــک تقریب برای

$\cos\frac{\pi x}{2}$ است .ضمناً ، به توجه به این که مقدار $|x^2 - x|$ در مــاکــسیمــم مــقدار

خــود را $x=\frac{1}{2}$ خــواهد داشت (چــرا؟) خطای در نقاط

دیگر کمتر از $|f(x)-P(x)|$ خواهد بود . $\frac{\pi^2}{32}$

۴-۶ تفاضلات متناهی

روشهای لاگرانژ و تفاضلا ت تقسیم شدهٔ نیوتن در حالت کلی برای نقاط x_0 ، x_1 ، . . . ، x_n چه متساوی الفاصله باشند چه نباشند ، چند جمله ای درونیاب را به دست می دهند . اما ، وقتی که x_i ها متساوی الفاصله باشند فرمولهای ساده تری موجودند که در این قسمت سعی می کنیم آنها را به دست آوریم . برای این منظور فرض می کینم که

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0, \ldots, n-1$$

که از آن نتیجه می شود

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

اکنون به تعریف چند عملگر می پردازیم که در بیان فرمولها به کار می روند .

۴-۶-۱ تعریف عملگر انتقال E

عملگر E چنین تعریف می شود :

$$Ef_i = f_{i+1}$$

در نتیجه،

$$E^2 f_i = E(Ef_i) = f_{i+2}$$

و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$E^k f_i = f_{i+k}$$

به این قرار داد که

$$x_{i+\alpha} = x_0 + (i+\alpha)h$$
$$f_{i+\alpha} = f(x_0 + (i+\alpha)h)$$

می توان تعریف بالا را به هر α ی حقیقی تعمیم داد :

$$E^{\alpha} f_i = f_{i+\alpha}$$

مثلاً

$$E^{-1} f_i = f_{i-1}$$

۴-۶-۲ تعریف عملگر تفا ضل پیشرو Δ

عملگر Δچنین تعریف می شود

$$\Delta = E - 1$$

که در نتیجه

$$\Delta f_i = (E-1)f_i = Ef_i - f_i = f_{i+1} - f_i$$

یعنی ،

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

وجه تسمیه پیشرو به توجه به تعریف بالا ست .

به همین ترتیب ،

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)\\ &= f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad .$$

در صورتی که k عددی طبیعی باشد داریم

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k (\Delta f_i) = \Delta^k (f_{i+1} - f_i)$$

در نتیجه

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$$

که یک فرمول بازگشتی برای محاسبهٔ تفاضلات پیشرو مراتب بالای f_i است.

۶-۴-۳ تعریف عملگر تفاضل پسرو ∇

عملگر ∇ چنین تعریف می شود

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

در نتیجه،

$$\nabla f_i = (1 - E^{-1}) f_i = f_i - E^{-1} f_i = f_i - f_{i-1}$$

پس،

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

چون در تعیین ∇f_i از مقادیر f در x_i و x_{i-1} استفاده می شود لفظ پسرو برای این تفاضلات به کار می رود .

در ضمن

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) \\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\end{aligned}$$

پس،

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

و به طور کلی، اگر k عدد طبیعی باشد

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

فرمولهای بالا را طی چند مثال به کار می بریم .

۴-۶-۴ مثال

تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

حل:

با توجه به فرمول (۴. ۲۷) داریم

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	۰			
		$(-1-0)=-1$		
۰	-1		$3-(-1)=4$	
		$2-(-1)=3$		$4-4=0$
۱	۲		$7-3=4$	
		$9-2=7$		
۲	۹			

مـشاهده می شود که اعداد به سادگی حساب می شوند و مشکل تفاضلات تقسیم شده را ندارند که باید اعداد تفا ضل   ها نیز تقسیم x_i شوند

۴-۶-۵   مثال

جدول تفاضلات تابع جدولی زیر را تشکیل دهید

x_i	1	1/1	1/2	1/3
f_i	2	2/331	2/728	3/197

حل:

مانند مثال قبل داریم :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۰			
		0/331		
۱/۱	2/3331		0/066	
		0/397		0/006
1/2	2/728		0/072	
		0/469		
1/3	3/197			

جـدول زیـر بـا تـوجه به (۴ . ۲۷) و (۴ . ۲۸) تـنظیم شـده است و نشان

می دهد که تـفاضلات پیشرو در ابتدای جدول و تفاضلات پسرو در انتهای

جدول کاربرد دارند.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \Delta f_0$	$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$	$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \Delta^3 f_0$
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \Delta f_1$	$\Delta f_2 - \Delta f_1 = \Delta^2 f_1$	
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \Delta f_2$		
x_{n-3}	f_{n-3}			
x_{n-2}	f_{n-2}	$f_{n-2} - f_{n-3} = \nabla f_{n-2}$		
x_{n-1}	f_{n-1}	$f_{n-1} - f_{n-2} = \nabla f_{n-1}$	$\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2} = \nabla^2 f_{n-1}$	$\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = \nabla^3 f_n$
x_n	f_n	$f_n - f_{n-1} = \nabla f_n$	$\nabla f_n - \nabla f_{n-1} = \nabla^2 f_n$	

۴-۷ کاربرد تفاضلات متناهی

یکی از کاربرد های تفاضلات متناهی تعیین درجهٔ یک چند جمله ای مناسب برای تقریب یک تابع جدولی است . در زیر نشان می دهیم که اگر تابع f یک چند جمله ای درجهٔ n باشد تفا ضلا ت مرتبهٔ n ام آن ثابت و تفاضلات مراتب بالاتر آن صفرند . از عکس این مطلب می توان برای تعیین یک چند جمله ای مناسب برای تقریب زدن با تابع جدولی f استفاده کرد .

۴-۷-۱ مثال

جدول تفاضلات تابع $f(x) = x^3$ برای نقاط $x_i = 0/1\times i \;,\; i = 0, 1, 2, 3, 4$ تشکیل دهید و نتیجه را توجیه کنید .

حل :

جدول مطلوب چنین است :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	۰			
		0/001		
0/1	0/001		0/006	
		0/007		0/006
0/2	0/008		0/012	
		0/019		0/006
0/3	0/027		0/018	
		0/037		
0/4	0/064			

مشاهده می شود که تفاضلات مرتبۀ سوم مقدار ثابتی دارند که برابر است با

$$3! \times (0/1)^3 = 0/006$$

و بالطبع تفاضلات مراتب بالاتر صفرند .

اکنون در حالت کلی قضیۀ زیر را ثابت می کنیم .

۴-۷-۲ قضیه

اگر $f(x) = x^n$ آن گاه $\Delta^n f_i = n!\ h^n$ و اگر $m > n$ آن گاه $\Delta^m f_i = 0$

بنابراین، اگر بخواهیم یک چند جمله ای جایگزین یک تابع جدولی کنیم، جدول تفـاضلات آن را تشکیـل می دهـــیم . اگر تفـاضلات از مرتبهٔ خاصی مقدار ثابت شدند می توان یک چند جمله ای به جای تابع قرارداد. البته خطای گـرد کردن در جداولی که اعـــداد آن تقریبی هستند، مشکل است و گاهی باید تساوی در حد خطای گرد کردن را مد نظر داشت .

۴-۷-۳ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x) = e^x$ را برای

$$x_i = 0/1 + i \times 0/01 \quad , \quad i = 0,1,2,3,4$$

تشکیل دهید و درجهٔ چند جمله ای مناسب برای تقریب زدن این تابع را به دست آورید .

حل: جدول تفاضلات، با منظورکردن اعداد تا ۵ رقم اعشار، چنین است .

x_i	$f(x_i)=e^{x_i}$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/01111		
0/11	1/11628		0/00011	
		0/01122		0
0/12	1/12750		0/00011	
		0/01133		0
0/13	1/13883		0/00011	
		0/01144		
0/14	1/15027			

نتایج مندرج در جدول نشان می دهد یک چند جمله ای درجهٔ دوم برای این تابع، دربارهٔ

$[0/1 ,0/14]$ مناسب است،

مثال ۴-۷-۴

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x) = e^x$ را برای نقاط

$$x = 0/1 + 0/05 \times i \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots,8$$

تشکیل دهید و درجهٔ چند جمله ای مناسب برای تقریب زدن با f را به دست آورید .

x_i	$f(x_i)=e^{x_i}$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/05666		
0/15	1/16183		0/00291	
		0/05957		0/00015
0/20	1/22140		0/00306	
		0/06263		0/00014
0/25	1/28403		0/00320	
		0/06583		0/00018
0/30	1/34986		0/00338	
		0/06921		0/00016
0/35	1/41907		0/00354	
		0/07275		0/00020
0/40	1/49182		0/00374	
		0/07649		0/00018
0/45	1/56831		0/00391	
		0/08041		
0/5	1/64872			

خطای موجود در مقادیر x_i هر رقم پنجم اعشار است ولی این خطا در طـول جدول افزایش پیدا می کنند . در اینجـا گفته می شود که تفاضلات مر تبهٔ سوم در حد خطای گرد کردن با هـم برابرند . از این رو، درجهٔ چند جمله ای مناسب ۳ است . این که حدخطای گردکردن برای مراتب مختلف تفاضلات چیـست دقیقاً نامعین است ولی یـک معیـار عمـلی نادقـیق برای نوسانات ناشی از خطای گرد کردن در جدول زیر آمده است .

مرتبهٔ تفاضلات	1	2	3	4	5	6
حدود خطای مورد انتظار	±1	±2	±3	±6	±12	±22

۸-۴ فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات پیشرو

در۴-۳-۴ فرمول چند جمله ای درونیاب را بر حسب تفاضلات تقسیم شده به دست آوریم . وقتی نقاط متساوی الفاصله باشند می توان چند جمله ای درونیاب را ساده تر به دست آورد. ضمناً چون هدف اصلی تعیین تقریبی از f(x) به ازای xی است که درجدول نیست می توان از تفاضلات پسرو یا پیشرو ، هر کدام مناسبتر است، استفاده کرد. برای این منظور ابتدا یک مثال ذکر می کنیم تا آمادگی لازم برای بدست آوردن فرمول مورد نظر ایجاد شود.

۴-۸-۱ مثال

نشان دهید که
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f.}{2! h^2}$$

حل:

می دانیم که ، $x_1 - x_0 = h$ ، $x_2 - x_1 = h$ و $x_2 - x_0 = 2h$ بنابراین، با توجه تعریف Δf_0 ،

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f_1}{h}$$

اما، با توجه به روابط بالا، داریم

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{\Delta f_0}{h} - \frac{\Delta f_1}{h}}{-2h}$$

$$= \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2h^2}$$

بنابراین داریم

$$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$$

پس ،

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_.}{2h^2}$$

اکنون به طور کلی لم زیر را ثابت کنید.

۴-۸-۲ لم

اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه به ازای هر $0 \le i$ ،

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k!h^k}$$

۴-۸-۳نتیجه

اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}$$

۴-۸-۴ لم

اگر $x = x_i + \theta h$ و k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$(x - x_i)\dots(x - x_{k+i}) = h^{k+1} \theta(\theta - 1)\dots(\theta - k)$$

۴-۸-۵ قضیه(فرمول تفاضلات پیشرو نیوتن برای چند جمله ای درونیاب)

اگر نقاط x_i متساوی الفاصله باشند و $x = x_0 + \theta h$ در این صورت

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \qquad **$$

۴-۸-۶ مثال

فرمول چند جمله ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را با استفاده از قضیه ۴-۸-۵ به دست آورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل :

ابتدا جدول تفاضلات پیشــرو را تشکــیل می دهیم . جدول زیر نشــان می دهد ، گر چــه چهار نقطه داریم ، چون $\Delta^3 f_0$ برابر صفر است چند جمله ای درونیاب از درجه دو است .

جدول ۱

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۲	
		۵		
				۰
۳	۱۰			
			۲	
		۷		
۴	۱۷			

با استفاده از فرمول ❊❊ چند جمله ای درونیاب ، بر حسب θ ، عبارت است از :

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta - 1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

مقادیر f_0 ، Δf_0 و $\Delta^2 f_0$ در بالای خط موربی که در جدول ۱ کشیده شده قرار دارند. و

که با توجه به این که $x = x_0 + \theta h$

$$h = 1 \quad , \quad x_0 = 1$$

داریم

$$x = 1 + \theta$$

❊❊

بنابراین ،

اگر به جای θ، از ❊❊، قرار دهیم $\theta = x - 1$ چند جمله ای درونیاب بر حسب x به دست می آید.

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

❋❋ فرمول چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ را بر حسب تفاضلات پیشرو مبتنی بر نقطه x_i ارائه می دهد. در حالت کلی میتوان فرمول چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ را به طریقی مشابه به دست آورد.

قضیه ۴–۸–۷

چند جمله ای درونیاب f در نقاط متساوی الفاصله $x_i, \ldots, x_{i+k}$ عبارت است از :

$$P(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \ldots + \frac{\theta(\theta-1)\ldots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k f_i$$ ❋❋❋

که در آن $x = x_i + \theta h$

۴-۸-۹ مثال

چند جمله ای درونیاب f در نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} بنویسید.

حل :

بنابر ❋❋❋ داریم :

$$P(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i$$

به سادگی می توان مستقیماً نشان داد که

$$P(x_i) = f_i \;,\; P(x_{i+1}) = f_{i+1} \;,\; P(x_{i+2}) = f_{i+2}$$

در صورتی که تفاضلات از مرتبه خاصی برابر باشد چند جمله ای درونیاب را

می توان با i های متفاوت به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

۴-۸-۱۰مثال

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی مثال ۴-۸-۶ را براساس نقطه x_1 به دست آورید.

حل :

چون $x_1=2$ داریم :

$$P(x)=f_1+\theta\Delta f_1+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_1$$

مقادیر f_1 ، Δf_1 و $\Delta^2 f_1$ که زیر خط موربی که در جدول کشیده شده است قرار دارند و از آنجا

$$P(x)=5+5\theta+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\times 2=\theta^2+4\theta+5$$

که در آن $x=x_1+\theta h=2+\theta$ لذا ، اگر قرار دهیم $\theta=x-2$

خواهیم داشت :

$$P(x)=(x-2)^2+4(x-2)+5=x^2+1$$

که همان $P(x)$ قبلی است .

سوالی که در اینجا مطرح است این است که وقتی $P(x)$ به چند طریق قابل بیان

است کدام صورت عملاً مفیدتر است ؟ جواب این است که با توجه به این که

$$x = x_i + \theta h$$

داریم

$$\theta = \frac{x - x_i}{h}$$

لذا x_i را چنان اختیار می کنیم که θ ، از نظر قدر مطلق کمترین مقدار را داشته

باشد ،به عبارت دیگر x_i را آن نقطه جدولی اخـتیار می کنیم که کـمترین فاصله

را تا x داده شده داشته باشد . مثال زیر مطلب را روشن می کند .

۴-۸-۱۱ مثال

جدول زیر مربوط به $f(x)=\sin x$ برای $x = 0^\circ, 10^\circ, ..., 50^\circ$ است $\sin 5^\circ$ بر آورد

با استفاده از چند جمله ای درونیاب .

x_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°
$\sin x_i$	۰	۱۷۳۶/۰	۳۴۲۰/۰	۵/۰	۶۴۲۸/۰	۷۶۶۰/۰

حل :

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی f چنین است :

x_i	$\sin x_i$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0°	۰					
		۱۷۳۶/۰				
10°	۱۷۳۶/۰		−۰۰۵۲/۰			
		۱۶۸۴/۰		−۰۰۵۲/۰		
20°	۳۴۲۰/۰		−۰۱۰۴/۰		۰۰۰۴/۰	
		۱۵۸۰/۰		−۰۰۴۸/۰		۰
30°	۵/۰		−۰۱۵۲/۰		۰۰۰۴/۰	
		۱۴۲۸/۰		−۰۰۴۴/۰		
40°	۶۴۲۸/۰		−۰۱۹۶/۰			
		۱۲۳۲/۰				
50°	۷۶۶۰/۰					

چون $x = 5^\circ$ می توان از $x_0 = 0^\circ$ یا $x_1 = 10^\circ$ استفاده کرد .
ما قرار می دهیم

$$x_0 = 0^\circ$$

در نتیجه

$$\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$$

و داریم

$$\begin{aligned}
\sin 5^\circ \cong\ & 0 + \frac{1}{2} \times 0/1736 + \frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times (-0/0052) \\
& + \frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} \times (-0/0052) \\
& + \frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)}{24} \times (0/0004) = 0/0871
\end{aligned}$$

مقدار واقعی $\sin 5^\circ$ برابر ۰/۰۸۷۲ است (تا چهار رقم اعشار) .

۹-۴فرمول چندجمله ای درونیاب برحسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$، وقتی x نزدیک به انتهای جدول تفاضلات است ، لازم است که از تفاضلات پسرو ،که بر حسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می شوند، استفاده کنیم .

۴-۹-۱ قضیه

چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ عبارت است از :

$$P(x) = f_n + \theta \Delta f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\Delta^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!}\Delta^n f_n$$

و فرمول چند جمله ای درونیاب f بر حسب تفاضلات پسرو ، در $x_{i-k+1},\dots,x_i$ عبارت است از :

$$P(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\Delta^2 f_i + \dots$$

$$+ \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+k-1)}{k!}\Delta^k f_i$$

۴-۹-۲ مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی ۴-۸-۱۱ تخمینی از $\sin 45^\circ$ حساب کنید.

حل :

قرار می دهیم $x_i = 40^\circ = x_4$ در نتیجه

$$\theta = \frac{x - x_i}{h} = \frac{45-40}{10} = \frac{1}{2}$$

و با قرار دادن $i=۴$ در فرمول و کمک گرفتن از اعدادی که در بالای خط مورب

کشیده شده در جدول مثال۴-۸-۱۱ قرار دارند، داریم :

$$\sin 45^\circ \cong 0/6428+\frac{1}{2}\times(0/1428)+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}\times(-0/0152)$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}{6}\times(-0/0048)+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}}{24}\times(0/0004)$$
$$=0/7071$$

که این عدد همان $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، یعنی $\sin 45^\circ$ تا ۴ رقم اعشار است .

۴-۱۰ درونیابی معکوس

تا کنون با معلوم بودن x مقدار f(x)را برآوردکردیم . اگرمنظور تخمین مقداری از x باشد به طوری که f(x)مقدار مـعلومی داشــته باشد این کار درونیابی معکوس نامیده میشود .درونیابی معکوس کاربردهایی نیز دارد .به عنوان مــثال ، می توان ریشه های f(x)=0 را به وسیله درونیابی معکوس تخمین زد ، به این ترتیب که x ی را به دست می آوریم که f(x)برابر صفر باشد . همچنین اگر جمعیت را در فاصله زمانهای معینی داشته باشیم و بخواهیم حدودسالی را تعیین کنیم که جمعیت تعداد مشخصی باشد از درونیابی معکوس استفاده می شود . برای جلوگیری از اطاله کلام تنها یک روش برای تخمین x ، به کمک داشتن f(x) ، راکه همانا روش تفاضلات تقسیم شده است ارائه می کنیم.

۴-۱۰-۱ تبدیل درونیابی معکوس به درونیابی مستقیم

اگر

$$y = f(x)$$

و f تابع معکوس داشته باشد داریم

$$x = f^{-1}(y)$$

لذا ، به جای جدول

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

می توان جدول زیر را در نظر گرفت

f_i	f_0	f_1	$\cdots$	f_n
x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n

با توجه به اینکه معمولاً فاصله xها یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست نمی توان از فرمول های پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد. از این رو تنها روش موثر که همواره قابل استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده است که در آن نقش x_iها و f_iها عوض شده است.

۴-۱۰-۲ مثال

جدول زیر در مورد تابع $f(x) = \sin x$ در دست است x ی را تعیین کنید که به ازای آن $f(x) = 0.2$.

x_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°
f_i	0	0.1736	0.3420	0.5	0.6428	0.7660

حل:

جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می دهیم ، توجه کنید که f(x) ها

طوری قرار گرفته اندکه $|f(x)-0.2|$ صعودی باشد ، این عمل برای کم کردن

خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه صورت گیرد.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
0. 1736	10					
		59. 38				
0. 3420	20		5. 18			
				13. 60		
		58. 48				
					13. 38	
0	0		9. 62			34. 86
				19. 88		
		60. 00				
					34. 03	
0. 5	30		15. 60			
				34. 31		
		70. 03				
0. 6428	40		41. 88			
		81. 17				
0. 766	50					

با استفاده از قضیه ۴-۳-۴ داریم:

$$x \approx 10 + (0.2 - 0.1736) \times 59.38 + (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420) \times 5.18$$

$$+ (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420)(0.2 - 0) \times 13.60$$

$$+ (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420)(0.2 - 0)(0.2 - 0.5) \times 13.38$$

$$+ (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420)(0.2 - 0)(0.2 - 0.5)(0.2 - 0.6428) \times 34.86$$

$$= 10 + 1.5676 - 0.0194 - 0.0102 + 0.0030 - 0.0035$$

$$= 11.5375$$

بنابراین ، جواب تقریباً 11. 53 75 در جه است.

یکی از راههای امتحان جواب فوق این است که به وسیله درونیابی مستقیم مقدار f(11. 53 75) را بر آورد کنیم و ببینیم 0. 2 می شود یا نه .

۴-۱۰-۳ مثال

جدول زیر مفروض است . تخمینی از صفر این تابع را به دست آورید .

x_i	0	1	2	3
f_i	1.5	-1	2.5	15

حل:

جدول تفاضلات زیر را با توجه به فاصله f_i ها تا صفر تشکیل می دهیم.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم
0-1	1			
		2		
-1. 5	0		-0. 4286	
		0. 5		0. 0252
2. 5	2		-0. 0255	
		0. 08		
15	3			

بنابراین

$$x \approx 1+(0+1)\times 2+(0+1)(0+1.5)\times(-0.4286)$$

$$+(0+1)(0+1.5)(0-2.5)\times 0.0252$$

$$=1+2-0.6429-0.0945$$

$$=2.2626$$

مشاهده می شود که جواب به دست آمده بسیار نادقیق است ، زیرا f(1) = -1

و f(2) = 2. 5 که قاعدتاً ریشه باید بین ۱و ۲ باشد ! نه بیش از ۲.

✪علت این امر آن است که فاصله بین x های جدول زیاد است. در صورتی که

فاصله بین x ها را کمتر بگیریم دقت جواب زیاد خواهد شد .

۴-۱۱ برازش منحنی

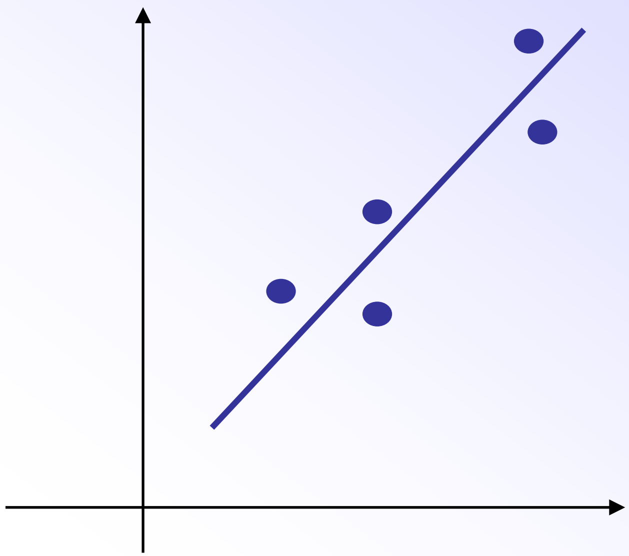
واقعیت این است که مقادیر f_i در یک تابع جدولی تقریبی هستند زیرا از طریق اندازه گیری یا آزمایش به دست می آیند . بنابراین ، اصرار در این که چند جمله ای درونیاب درنقاط x_i مقدار f_i را داشته باشد بیهوده است. در عمل اکثراً نقاط جدولی را به وسیله یک منحنی چنان برازش می کنند که خطا به نوعی حداقل باشد.

۴-۱۱-۱ تعریف

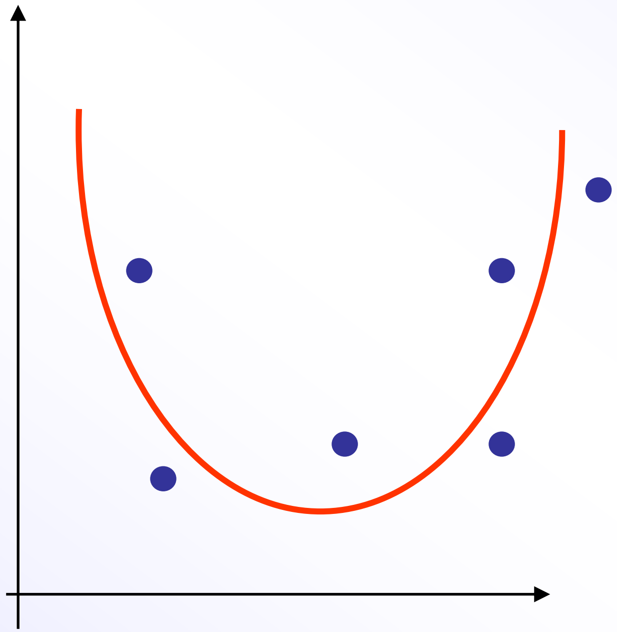
فرض کنید نقاط $(x_i, y_i), i=1,2,\dots,n$ مفروض باشند. و چند جمله ای P(x) چنان باشد که

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-P(x_i)\right)^2$$

کمترین مقدار را داشته باشد . در این صورت P(x) را چند جمله ای **تقریب** **کمترین مربعات** برای داده های $(x_i, y_i), i=1,2,\dots,n$ نامند.



(الف) خط کمترین مربعات



(ب) سهمی کمترین مربعات

در حالت کلی برای به دست آوردن P(x) فرض کنید که

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 \;\;,\;\; (a_m \neq 0)$$

چند جمله ای کمترین مربعات درجه m باشد . برای به دست آوردن ضرایب P(x)

باتوجه به * قرار می دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \;\;,\;\; j = 0,1,\ldots,m.$$

معادلات بالا تشکیل یک دستگاه شامل m+1 معادله برای m+1 مجهول $a_m, \ldots, a_0$

می دهد.

۴-۱۱-۲ خط کمترین مربعات

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات برای

برازش n نقطه مفروض $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ است . در این روش

$$P(x) = ax+b$$

و باید a و b را چنان تعیین کرد که

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

مینیمم باشد . از این رو ، قرار می دهیم :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

اما داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i (y_i - (ax_i + b))^2 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases}$$

پس از ساده کردن ، معادلات بالا دستگاه زیر را نتیجه می دهند

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a + \left(n \sum_{i=1} x_i \right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

از دستگاه بالا مقادیر a وb به دست می آیند که توسط آنها خط کمترین مربعات
$y = ax + b$ مشخص می شود.

۴-۱۱-۳ مثال

خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدول زیر را تعیین کنید.

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0	1	2	2	3

حل:

در این مثال داریم:

$$n=5 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 10$$

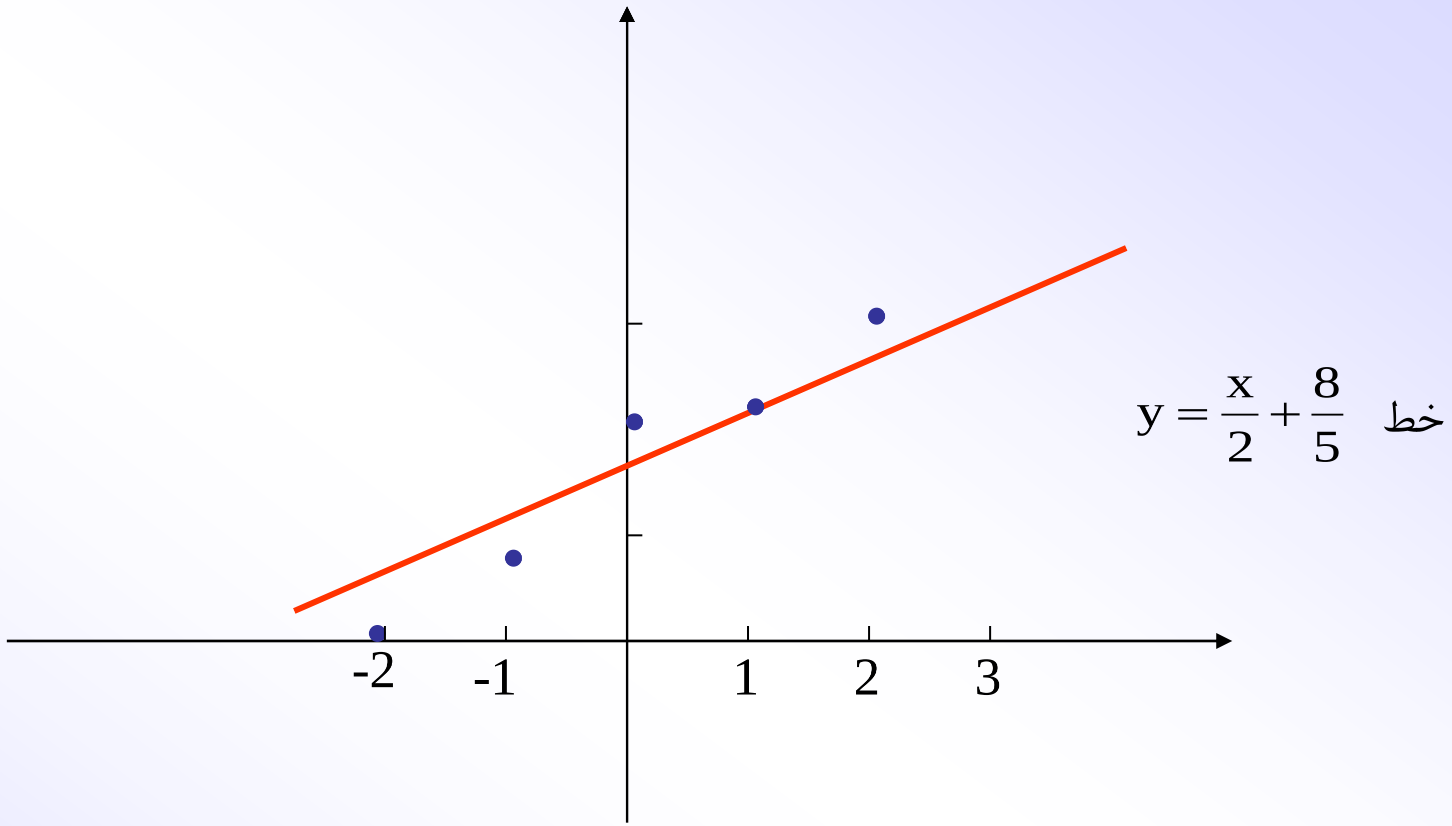
$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 7 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 8$$

بنابراین

$$\begin{cases} 10a = 7 \\ 5b = 8 \end{cases}$$

که از آن نتیجه می شود

$$b = \frac{8}{5} \quad , \quad a = \frac{7}{10}$$



-2
-1
1
2
3
$y = \frac{x}{2} + \frac{8}{5}$ خط

فصل پنجم

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

مقدمه

در ابتدای این فصل روشهای پیدا کردن تقریبهایی برای $f'(x)$ به ازای مقادیر

مختلف x را ارائه می کنیم . سپس به تعیین تقریب برای

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

می پردازیم. همان گونه که می دانید توابع فراوانی موجودند که تابع اولیه ندارند،یعنی

تابعی چون $F(x)$ نیست که به ازای $a \le x \le b$

$$F'(x) = f(x).$$

از این رو، محاسبهٔ این انتگرالها با روش عادی امکان پذیر نیست. از این جمله اند انتگرالهای زیر که اغلب کاربردهای عملی دارند.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$$

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-(\sin k)^2 \sin^2 x}}$$ (انتگرال بیضوی)

در این فصل روشهایی ارائه می کنیم که به وسیلهٔ آنها می توان تقریبی از یک انتگرال معین را تا هر درجهٔ دقت حساب کرد (البته در حد دقتی که وسایل محاسباتی دارند).

هدفهای کلی

۱. روشهای برآورد $f'(x)$ به ازای x های مختلف و تعیین خطای آن

۲. بیان اشکالات مشتقگیری

۳. شرح قاعدهٔ ذوزنقه ای برای برآورد یک انتگرال معین و تعیین خطای آن

۴. شرح قاعدهٔ سیمسون و تعیین خطای آن

۵. شرح قاعدهٔ رامبرگ وکاربرد آن

۶. شرح منشأ قواعد انتگرالگیری و ارائهٔ فرمولهای نیوتن -کاتس و گاوس

۷. تخمین بعضی انتگرالهای ناسره

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند :

۱. تخمینی از $f'(x)$ وقتی x و تابع جدولی f معلوم است، را حساب کند .

۲. روشهای انتگرالگیری مناسب را برای برآورد یک انتگرال معین به کار برد وتقریبی از یک انتگرال را حساب کند که خطایی کمتر از مفروض داشته باشد ε

۳. تقریبی از انتگرالهای ناسره را به کمک روشهای خوانده شده حساب کند

۵. مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

کاربرد مشتق وانتگرال در ریاضیات مهندسی و دیگر علوم فراوان است ، و در حـل اکثر مسائـل از آنها اســتفاده می شود . در آنـالیز ، که معمولاً ضابطه یا ضابطه هایی برای تعریف تابع ارائـه مـــی شود ، فرمولهایی نیز برای محاسبهٔ مشتق وانتگرال ، به شرط وجود ، به دست می آید . امـا ، اگر تـابع مورد نظر بــسیار پــیچیده باشد یا با تـابعی جـدولی سرو کـار داشتـه باشیم (که فرض می شود جدول مذکور از یک تابع مــشتق پذیر یا انتگرال پذیر ، ناشی شده است) بایـــد به روشهای عددی روی آورد .

۱-۵ مشتقگیری عددی

برای مشتقگیری عددی ، همان طور که قبلاً اشاره شده ، از چند جمله ای درونـیاب استفا ده می کنیم . در (۴ . ۳۶) چند جمله ای درونیاب f در x_i ، x_{i+1}، ... ، x_{i+k} را چنین به دست می آوردیم :

$$p(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_i \qquad (۱)$$

$$+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)}{4!}\Delta^4 f_i + \ldots + \frac{\theta(\theta-1)\ldots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k f_i$$

که در آن ، $x = x_i + \theta h$ و $x_{i+1} - x_i = h$ برای $i = 0, 1, \ldots, n-1$ چون $P(x)$ بر حسب θ ارائه شده است می نویسیم

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} \qquad (۲)$$

اما داریم ، $dx = h d\theta$ که در نتیجه

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \qquad (۳)$$

بنابراین ، با مشتقگیری از (۱) و در نظر گرفتن (۲) و (۳)

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{2} + \frac{5\theta}{12} - \frac{1}{2}\right)\Delta^4 f_i \ldots\right] \qquad (۴)$$

اگر قرار دهیم $\theta=0$ با توجه به $x = x_i + \theta h$ ، داریم $x=x_i$ و از (۴) نتیجه می شود

$$f'(x_i) = f_i' \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \frac{1}{2}\Delta^4 f_i + \ldots\right)$$

معمولاً برای محاسبهٔ تقریبی از f_i' یک چند جمله ای از سمت راست انتخاب می شود .

مثلاً

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (۵)$$

ویا

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right) = \frac{1}{h}\left[f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2}\left(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\right)\right]$$

که در نتیجه

$$f'_i \simeq \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \qquad (۶)$$

ضمناً اگر قرار دهیم $\theta = \frac{1}{2}$، به توجه به $x = x_i + \theta h$ به دست می آوریم

و $x_i + \frac{1}{2}h$ از (۴) نتیجه می شود :

$$f'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{48}\Delta^4 f_i + \ldots\right)$$

از ایـن رو ، اگـر تنها جملـــــهٔ اول داخل پـرانتز سـمت راست را انتخاب

می کنیم

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

و اگر دو جملهٔ اول را منظورکنیم

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\simeq\frac{1}{h}\left(\Delta f_i-\frac{1}{24}\Delta^3 f_i\right)$$

۵- ۱-۱ مثال

با توجه به جدول زیر تقریبی از f'_i، i=۰ ،۱ ،۲ ، یک بار با استفاده از فرمول (۵) و بار دیگر با استفاده از (۶) حساب کنید .

x_i	0/1	0/15	0/2	0/25	0/3
f_i	1/10517	1/16183	1/22140	1/28403	1/34986

حل :

جدول تفاضلات f را با توجه به جدول بالا تشکیل دهیم .

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/05666		
0/15	1/16183		0/00291	
		0/05957		0/00015
0/2	1/22140		0/00306	
		0/06263		0/00014
0/25	1/28403		0/00320	
		0/06583		
0/3	1/34986			

از این رو ، با توجه به فرمولهای (۵ . ۵) و(۵ .۶) داریم $(h = 0/05)$

f_i	$f'_i \simeq \frac{\Delta f_i}{h}$	$f'_i \simeq \frac{\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i}{h}$
۱۰۵۱۷/۱	۱۳۳۲/۱	۱۰۴/۱
۱۶۱۸۳/۱	۱۹۱۴/۱	۱۶۰۸/۱
۲۲۱۴۰/۱	۲۵۲۶/۱	۲۲۰۶/۱
۲۸۴۰۳/۱	۳۱۶۶/۱	ــــــــ

اعـداد f_i که در این مثال داده شده اند مربوط به تابع $f(x)=e^x$ هستند که مشتق آ ن با خودش برابر است . بنابراین ، در جدول اخیر ، باید اعداد مـوجود در هر سـه ستـون یـکسان باشند ! که نـیستند . الــبته مــشاهده می شود اعدادی که از فرمول (۶) به دست آمده اند ، دقیقتر از اعــــدادی هستند که از (۵) به دست می آیند .

۵-۱-۲ مثال

با توجه به تا بع جدولی مثال (۵- ۱-۱) تقریبهایی $f'(x_i, \frac{h}{2})$ به کار بردن (۷) و (۸) حساب کنید .

حل :

با توجه به جدول تفاضلاتی که در مثال (۵ -۱ -۱) به دست آوردیم ، داریم :

$x_i+\frac{h}{2}$	$f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$	$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\simeq\frac{\Delta f_i}{h}$	$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\simeq\frac{\Delta f_i-\frac{1}{24}\Delta^3 f_i}{h}$
۱۲۵/۰	۱۳۳۱۵/۱	۱۳۳۲/۱	۳۳۸۰/۱
۱۷۵/۰	۱۹۱۲/۱ ۵	۱۹۱۴/۱	۱۹۱۲۸/۱
۲۲۵/۰	۲۵۲۳۲/۱	۲۵۲۶/۱	———
۲۷۵/۰	۳۱۶۵۳/۱	۳۱۶۶/۱	———

در جدول بالا دو ستون از سمت چپ فقط برای مقایسهٔ مقادیر به دست آمده ،درج شده اند ، ضمناً در ستون آخر به دلیل عدم وجود $\Delta^3 f_2$ و $\Delta^3 f_3$ بقیهٔ فقره ها حساب نشده اند . نتایج این جدول ، با توجه به این که $f(x)=f'(x)$ نشان می دهند که $\frac{\Delta f_i}{h}$ بسیار نزدیک به $f'(x_i+\frac{h}{2})$ هستند . به عبارت دیگر ، $\frac{\Delta f_i}{h}$ که هم تقریبی از $f'(x_i)$ و هم تقریبی از $f'(x_i+\frac{h}{2})$ است به $f'(x_i+\frac{h}{2})$ نزدیکتر است تا به $f'(x_i)$

۵-۱-۳ خطای مشتقگیری عددی

برای پیدا کردن خطای فرمولهای مختلفی که از (۵ . ۴) برای $f'(x)$ حاصل می شود

از بسط تیلر استفاده می کنیم . مثلاً ،

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$$

در نتیجه

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h}{6} f_i''' + \dots \qquad (۹)$$

با توجه به (۵) و با در نظر گرفتن (۹) ، داریم

$$\frac{f_{i+1} + f'_i}{h} = f_i + \frac{h}{2} f''_i + \dots \qquad (۱۰)$$

از این رو ، $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ به عنوان تقریبی از f'_i ، عبارت است از

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f'_i=\frac{h}{2}f''_i+\frac{h^2}{6}f'''_i+\dots$$

با توجه به این که h کوچک گرفته می شود جملهٔ غالب در سمت راست $\frac{h}{2}f''_i$ است که اصطلاحاً گفته می شود خطا متناسب با h است و یا نوشته می شود :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f'_i=O(h) \qquad (۱۱)$$

۵-۱-۴ تعریف (اوی بزرگ) O

اگر $f(h)\,,\,g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h)\neq 0$ و داشته باشیم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}=c\neq 0$$

در این صورت می گو ییم $f(x)=o(g(h))$.

در حالت خاصی که $g(h)=h^{p}$ ، که در آن p عدد حقیقـی مثبتی است، داریم

$$f(h)=o(h^{p})$$

هر چه p بزرگتر باشد $f(x)$ سریعتر به صفر میل می کند .

۵-۱-۵ تعریف (اوی کوچک) O

اگر $f(h)$, $g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h) \neq 0$ و داشته باشیم

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

در این صورت می گوییم $f(x)=o(g(h))$ و اگر $g(h) = h^p$ آن گاه

$$f(h) = o(h^p)$$

به عبارت دیگر، $f(h)$ سریعتر از h^p به صفر میل می کند .

۵-۱-۶ قضیه

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2)$$

مثالهای (۵-۱-۱)و(۵-۱-۲) نتایج (۱۱) و (۱۲) را تـأیید می کنند. به این معنا که هر چه تـــوان h در عبارت خطا بیشتــر باشد تقریب بهتر ، یا خطا کمتر است . اما ، به طور کلی نباید به نتایج تقریبـــــی که از فرمولهای فوق حاصل می شود اعتماد کرد .

در حالت کلـــــی خطای فرمولهایی که از (۴) حاصل می شوند به صـورت $O(h^p)$ است که در آن p بـــــستگی به تعداد جملاتی که از (۴) انتخاب می شود . ظاهـــراً هر چه p بزرگتر باشد خطا نیز کمتر خواهد بود ،ولی عملاًخـــــــطای گـرد کردن، به هنگام کوچـک بودن مقدار h ، سبب مشکلاتی در ســــــــازگاری نظری با نتایج عددی می شود .

۷-۱-۵ مشتقات مراتب بالا

با توجه به آنچه گفته شد می تون مشتق مرتبهٔ دوم ، سوم و... را نــیز برآورد کرد .

با توجه به مطالب که در مورد خطای مشتقگیری عددی گفته شد تنها $f''(x)$ را بررسی می کنیم

می دانیم که

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} \simeq \frac{dp'(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$

با استفاده از (۳) و (۴) داریم :

$$f''(x) \simeq \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i + (\theta-1)\Delta^3 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{5}{12}\right)\Delta^4 f_i + \ldots\right]$$

در اینجا هم می توان یک یا چند جمله از عبارت سمت راست را به عنوان تقریبی از $f''(x)$ اختیار کرد . مثلاً، اگر $x = x_i$ آن گاه $\theta = 0$ و

$$f''_i = f''(x_i) \simeq \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{5}{12}\Delta^4 f_i + \dots\right)$$

که از آن تقریبهای زیر حاصل می شود :

$$f''_i \simeq \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$$

ویا

$$f''_i \simeq \frac{\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i}{h^2}$$

همچنین ، اگر $\theta = 1$ داریم $x = x_i + h$ یعنی ، $x = x_{i+1}$ و در نتیجه

که از آن تقریبهای زیر حاصل می شود

$$f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i - \frac{1}{12}\Delta^4 f_i + \dots\right)$$

$$f''_{i+1} \simeq \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$$

۵-۱ -۸ مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مثال (۵ - ۱- ۱) و فرمولهای (۵ . ۱۵) و (۵ . ۱۶)

تقریبهایی از f''_i حساب کنید .

حل :

با توجه به فرمولهای مذکور داریم :

x_i	f_i	f''_i از (۱۵)	f''_i از (۱۶)
۱/۰	۱۰۵۱۷/۱	۱۶۴/۱	۱۰۴/۱
۱۵/۰	۱۶۱۸۳/۱	۲۲۴/۱	۱۶۸/۱
۲/۰	۲۲۱۴۰/۱	۲۸/۱	——

همان طور که قبلاً ذکـر شد f_i مساوی e^{x_i} است . بنابراین ، بایـــد اعداد به دست آمده تقریباً با f_i ها مساوی باشنـــــد . ملاحظه می شود که $\frac{\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i}{h^2}$ تقریب بـهتری برای f''_i است تا $\frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$ ضمناً فرمول (۱۷) و نـتایج مندرج در ستون سوم جدول بالا نشان می دهند که $\frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$ تقریب بهتری برای f''_{i+1} است تا f''_i .

۱-۵ انتگرالگیری عددی

محاسبهٔ انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x)dx$$

که در آن a و b متناهی و $f(x)$ بر $[a,b]$ معین باشد، به روشهای تحلیلی، یـعنی با استفاده از تـابع اولـیه $f(x)$ ، غالباً یا مشکل است یا غیر ممکن . بنابرین ، حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای $f(x)$ نیز از انتگرال گیری عددی استفاده می شود . واضح است که انتگرال معین را می توان به عنوان مساحت سطح زیر منحنی $y=f(x)$ که محصـــــور به محور x و خطوط x=a و x=b است ، تعبیر کرد و با تقسیم بازهٔ $[a,b]$ به زیر بازه ها و جمع کردن مساحتهای مربوط به این زیـــــربازه ها آن را محاسبه کرد .

با استفاده از این خاصیت و چند جمله ای درو نیاب می توان تقریبهای مناسبی برای

$\int_a^b f(x)dx$ به دست آورد.

ابتدا روشی را به کار می بریم که در آن $[a,b]$ به n قسمت متساوی تقسیـــــم می شود

، یعنی $[a,b]$ به زیر بازه های

$$[x_i, x_{i+1}] = h \quad , \quad i = 0,1,\dots,n-1$$

تقسیم می شود که در آن

$$x_{i+1} - x_i = h \ , \ i = 0,1,\dots,n-1$$

و در نتیجه

$$h = \frac{b-a}{n} \quad ,$$

و بعد چند جمله ای درونیاب $P_m(x)$ در نقاط x_i ، x_{i+1} ، ... ، x_{i+m} ، با استفاده از

(۴ . ۳۶) ،حساب می شود و بعد

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} Pm(x)dx$$

به دست می آید . با جمع کردن این مقادیر ، تقریبی برای

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^{x_n} f(x)dx$$

به دست می آ ید.در زیر،حالت هایی را که m=1 و m=2 بررسی می کنیم .

۵-۲-۱ قاعدهٔ ذوزنقه ای

در ایـن قـاعده چند جمله ای درونیاب تابع f را در نقاط x_i و x_{i+1} به دست می آوریم ، که یک خط است.معادلهٔ این خط عبارت است از (با توجه به۴ . ۳۷)

$$p_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i$$

در نتیجه ، با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$ ،

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i) h d\theta$$

$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_i \right]_0^1$$

$$= h\left(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_i \right)$$

اگر به جای Δf_i قرار دهیم $f_{i+1} - f_i$ به دست می آوریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

بنابراین ، قرار می دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

با توجه به شکل ، در واقع مقدار تقریبی مساحت ذوزنقه ای است که با خطوط قائم هاشور زده شده است.از این رو(۵ . ۲۱) را **فرمول قاعــدهٔ ذوزنقه ای** می نامند

برای پیدا کردن فرمول تقریبی برای $\int_a^b f(x)$ می نویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{xi}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$+ \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \ldots$$

$$+ \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n)$$

عبارت اخیر را ، با توجه به حرف اول کلمهٔ لاتین معادل ذوزنقه ای $T(h)$ می نامیم . بنابراین ،

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

شکل (۵ - ۲) نشان می دهد که هـــــرچه h کوچکتر اختیار شود خطا کمتر است ،

البته به بهای محاسبـــه مقدار تابع در نقاط بیشتری فرمول (۵ . ۲۲) را **فرمول قاعدهٔ ذوزنقه ای مرکب** می نامند .

۵-۲-۲ مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2dx$ را ، به روش ذوزنقه ای ، و به ازای $h=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ حساب و خطای این مقادیر را نیز تعیین کنید .

حل :

بنابر (۵ . ۲۲) داریم ، با توجه به این که $a=0$، $b=1$, $f(x)=x^2$ ،

$$T(1)=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{4}\left(0+2\times\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{2}\left(f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(0+2\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{9}{16}+1\right)=\frac{11}{32}$$

مقدار واقعی چنین حساب می شود !

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

ملاحظه می شود که هر چه h کوچکتر می شود $T(h)$ نیز به $\frac{1}{3}$ نزدیکتر می شود

خطای مطلق مقادیر حساب شده عبارت است از

$$T(1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$T(\frac{1}{2})-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

$$T(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}=\frac{11}{32}-\frac{1}{3}=\frac{1}{96}$$

ملاحظه می شود که وقتی h نصف می شود ، یعنی به جای ۱می شود ، خطا $\frac{1}{2}$

می شود(یعنی $\frac{1}{4}$ مـی شـود $\frac{1}{6}$ ، کـه عدد $\frac{1}{24}$ اسـت $\frac{1}{4}$) . بنابراین، $\frac{1}{6}$ چنین

حدس زده می شود که خطا متناسب با h^2 است . درستی این حدس را بعداً ثابت می

کنیم .

۵-۲-۳ مثال

۱- تـقریبی از $\int_0^1 f(x)dx$ را با استفاده از جـــدول مقا دیر زیـر حساب کنید.

x_i	۰	۲/۰	۴/۰	۶/۰	۸/۰	۱
f_i	۱	۲۲۱۴/۱	۴۹۱۸/۱	۸۲۲۱/۱	۲۲۵۵/۲	۷۱۸۳/۲

حل :

مشاهده می شود که در این مثال خبری از ضابطهٔ تابع f نیست . با توجه به نقاط جدولی

می توانیم قـــاعدهٔ ذوزنقه ای را با فرض $h=0/2$ به کار بریم .

$$T(0/2)=\frac{0/2}{2}(f(0)+2(f(0/2)+f(0/4)+f(0/6)+f(0/8))+f(1))$$

که با توجه به جدول مقادیر ، چنین نوشته می شود :

$$T(0/2)=0/1(1+2\times 6/7608+2/713)=1/72399$$

اعداد جدول بالا مربوط به مقادیر تابع $f(x)=e^x$ هستند ، برای این تابع داریم

$$\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1=1/71828 \quad (5D)$$

ملاحظه می شود که خطا برابر است با $1/72399-1/71828=0/00571$

۲- تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را با استفاده $h = \frac{\pi}{8}$ حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید .

حل :

$$T\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16}\left(\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{16}(0 + 2(0/38268 + 0/70711 + 0/92388) + 1)$$

$$= \frac{\pi}{16} \times 5/02734.$$

بنابراین ،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq T\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0/98712$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

مقدار واقعی انتگرال عبارت است از

مقدار واقعی - $T(\frac{\pi}{8}) = 1 - 0/98712 = 0/01288$

۵-۲-۶ قضیه

اگر تابع h بر $[c,d]$ پیوسته و تابع g در این بازه انتگرالپذیر باشد و تغییر

علامت ندهد (یعنی ، همواره نا منفی یا همواره مثبت باشد) در این صورت ،

$$\int_c^d g(x)h(x)dx = h(\eta)\int_c^d g(x)dx$$

که $\eta \in [c,d]$

۵-۲-۷ قضیه

اگر تابع h بر $[c, d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c \le x \le d} h(x) \le \zeta \le \max_{c \le x \le d} h(x)$$

آن گاه ηی هست که

$$c \le \eta \le d \quad , \quad h(\eta) = \zeta$$

به عبارت دیگر ، هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته و محدود ، هر مقدار بیـن ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه ای از حوزهٔ تعـریفش اختیار می کند .

۵-۲-۸ قضیه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه ای از فرمول زیر به دست می آید

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)$$

که در آن η_i بین x_i و x_{i+1} است ، به شرط آن که $f''(x)$ پیوسته باشد.

۵-۲-۹ قضیه

با توجه به علا مات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f''(x)$ بر $[a,b]$

$$ET(h) = \int_a^b f(x)dx - T(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \ ,$$

که $a \le \eta \le b$.

۵-۲-۱۰ نتیجه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه ای مرکب متناسب با h^2 است واین قاعده برای توابع چند جمله ای حد اکثر از درجهٔ اول دقیق است .

۵-۲-۱۱ نتیجه

اگر M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد ، یعنی

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x)| \le M_2$$

آن گاه

$$|ET(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

۵-۲-۱۲ مثال

تقریبی از $\int_0^1 x\sin x\,dx$ را به قاعدهٔ ذوزنقه ای ، حسب کنید که خطای آن از 10^{-2} کمتر باشد .

حل : ابتدا M_2 را به دست می آوریم . برای این منظور مشتق مرتبهٔ دوم را حساب می کنیم .

$$f(x) = x\sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x\cos x \ , \ f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

بنابراین ، با توجه به این که $0 \le x \le 1$ ،

$$|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x| \le 2|\cos x| + |x||\sin x| \le 2 + x1 = 3$$

پس ، $M_2 = 3$ و h را از نامساوی زیر به دست می آوریم .

$$\frac{b-a}{12}h^2M_2=\frac{h^2}{12}\times 3=\frac{h^2}{4}\leq 10^{-2}$$

که از آن نتیجه می شود

$$h\leq 0/2$$

از این رو ، قرار می دهیم $h=$ ۰/۲ و $T(h)$ را حساب می کنیم (اعداد میانی را تا چهار رقم اعشار گرد می کنیم) .

$$T(0/2)=\frac{0/2}{2}(0+2(0/2\sin 0/2+0/4\sin 0/4+0/6\sin 0/6+0/8\sin 0/8)+\sin 1)$$

$$=0/1(0+2(0/03973+0/15577+0/33879+0/57388)+0/84147)$$

$$=0/30578$$

با محاسبهٔ جواب واقعی به طریق زیر خطای $T(h)$ نیز حساب می شود .

$$\int_0^1 x\sin x\,dx = (\sin x - x\cos x)\Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1 = 0/84147 - 0/54030$$

$$= 0/30117 (5D)$$

بنابراین ،

$$|ET(h)| = |0/30117 - 0/30578| = 0/00461$$

ملاحظه می شود که $|ET(h)| < 10^{-2}$

۳-۵ قاعده سیمسون

همانگونه که از (5-2-11) , (5-2-12) مشهود است قاعده ذوزنقه ای بسیار کند است .

به عبارت دیگر ، برای بدست آوردن تقـریبی نه چندان دقیق باید تابع را در نقاط بسیاری

محاسبه کرد . روش سیمسون بـــــرای محاسبات دستی بسیار ساده و نسبتا دقیق است .

این روش بر اساس جایگزین کردن یک چند جمله ای درجه دوم ، به جای تابع f ، در

$[x_i , x_{i+2}]$ به دست می آید.

۵-۳-۱ فرمول قاعده سیمسون

ابتدا چند جمله ای درونیاب f را در نقاط x_i , x_{i+1} , x_{i+2} می نویسیم. این چند جمله ای بنابر (38-4) عبارت است از

$$P(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i$$

بنابراین قرار می دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx$$

و انتگرال سمت راست را محاسبه می کنیم.

با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$ داریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \int_0^2 \left(f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i\right) h d\theta$$

$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4}\right)\Delta^2 f_i\right]_0^2$$

بنابراین

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = h\left[2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3}\Delta^2 f_i\right]$$

که با توجه به روابط

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad , \quad \Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

چنین ساده می شود

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

بنابراین فرمول قاعده سیمسون عبارت است از

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right) \qquad (❋)$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمسون در سراسر بازه $[x_0, x_n]$، چون (❋)

تقریبی برای بازه $[x_i, x_{i+2}]$ است لذا باید n زوج باشد تا بتوان(❋) را به کار برد.

با فرض زوج بودن n داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

با به کار بردن (❋) به ازای i=0 , 2 , … , n-2 به دست می آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_3 + f_4\right) + \ldots \frac{h}{3}\left(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

عبارت اخیر را با توجه به حرف اول کلمه سیمسون ، S(h) می نامیم . بنابراین ،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

این فرمول قاعده سیمسون مرکب است .

۵-۳-۲ مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ با قاعده سیمسون با $h = \frac{\pi}{4}$ و تقریبی دیگری به ازای $h = \frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید.

حل:

$$S(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\pi}{4}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\pi}{12}(0 + 2\sqrt{2} + 1) = \frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{12} = 1/00228$$

به ازای $h = \frac{\pi}{8}$ داریم

$$S(\frac{\pi}{8}) = \frac{\frac{\pi}{8}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\pi}{24}(0 + 1/53073 + 1/41421 + 3/69552 + 1)$$

$$= \frac{\pi \times 7/64046}{24} = 1/00013$$

ملاحظه می شود که چون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$S(\frac{\pi}{4})$ و بخصوص $S(\frac{\pi}{8})$ نسبتا دقیق هستند . جالب این که در ، با توجه به $S(\frac{\pi}{8})$

اینکه $\sin 0$ و $\sin\frac{\pi}{2}$ را می دانیم ، نیاز به محاسبه سه تابع $\sin x$ داریم.

ضمنا ، خیلی دقیقتر از است که در مثال (۵-۲-۴) به دست آوردیم.

$T(\frac{\pi}{8})$ $S(\frac{\pi}{4})$

۵-۳-۳ مثال :

تقریبی از $\int_0^1 x^3dx$ را به ازای قاعده سیمسون محاسبه کنید.

حل:

بزرگترین مقداری که برای h می توان اختیار کرد $h=\frac{1}{2}$ است (زیرا ، تعداد زیر فاصله ها

باید زوج باشد). بنابراین ، داریم

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(0+4\times\frac{1}{8}+1\right)=\frac{1}{4}$$

اما

$$\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{1}{4}$$

یعنی،

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

البته این اتفاقی نیست و در ادامه ثابت خواهیم کرد که قاعده سیمسون برای چند جمله ای های تا درجه سه دقیق است .

۵-۳-۴ خطای S(h)

برای تعیین خطای S(h) ابتدا خطای (*) را حساب می کنیم . برای این منظور ، و سادگی عملیات ، تفاضل زیر را محاسبه می کنیم .

$$E_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right)$$

که برابر $-\frac{h^5}{90} f_i^{(4)}$ است .

و با توجه به علامات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f^{(4)}(x)$ بر بازه $[a , b]$ داریم:

$$ES(h) \cong -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \qquad (۱)$$

این رابطه نشان می دهد که خطای S(h) متناسب با h^4 است و این خطـــا برای چند

جمله ای های تا درجه سوم صفر است (زیرا ، مشتق چهارم یک چند جمله ای که

درجه آن نابیشتر از ۳ باشد صفر است). به عبارت دیگر روش سیمسون برای چند

جمله ایهای تا درجه ۳ دقیق است . با توجه به اینکه   نقطه مشخصی نیست در

عمل فرض h می کنند

$$\max_{x_0 \le x \le x_n} \left| f^{(4)}(x) \right| \le M_4$$

که از آن نتیجه می شود

$$\left| ES(h) \right| \le \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$$

با استفاده از را بطه بالا می توان S(h) را با دقتی که از قبل تعیین می شود محاسبه

کرد .

یعنی ، اگر بخواهیم S(h) را چنان پیدا کنیم که

$$\left|ES(h)\right| < \varepsilon$$

که در آنگاه ε عدد کوچک معلومی است ، کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \le \varepsilon$$

البته با داشتن تابع f مشکلی در محاسبه M_4 نیست.

۵-۳-۵ مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ به روش سیمسون محاسبه کنید که خطای آن کمتر از 10^{-5} باشد .

حل:

با توجه به اینکه $f(x)=x\cos x$ داریم:

$$f'(x)=\cos x - x\sin x \quad , \quad f''(x)=-2\sin x - x\cos x$$

$$f'''(x)=-3\cos x + x\sin x \quad , \quad f^{(4)}(x)=4\sin x + x\cos x$$

بنابراین با توجه به این که $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ ، M_4 به دست می آوریم:

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|4\sin x + x\cos x\right| \le 4\left|\sin x\right| + \left|x\right|\left|\cos x\right| \le 4+\frac{\pi}{2} < 6$$

پس، $M_4 = 6$ و قرار می دهیم.

$$\frac{(b-a)}{180}h^4M_4=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{180}h^4\times 6=\frac{\pi h^4}{60}\leq 10^{-5}$$

که ازآن نتیجه می شود

$$h\leq 0/1\times\sqrt{\frac{6}{\pi}}\cong 0/1176$$

چون $nh=b-a=\frac{\pi}{2}$، پس

$$n=\frac{\pi}{2h}\geq 13/357$$

چون در روش سیمسون n باید زوج باشد قرار می دهیم n=14 که در نتیجه h مربوط به آن ، که حتما از 0/1176 کمتر است ، چنین به دست می آید .

$$h=\frac{\frac{\pi}{2}}{n}=\frac{\pi}{28}\cong 0/1122$$

به این ترتیب باید S(h) را به ازای h=0/1122 حساب کنیم.

۴-۵ قاعده نقطه میانی

روشهای انتگرال گیری ذوزنقه ای و سیمسون که تا کنون شرح داده ایم از نقاط ابتدایی و انتهایی بازه انتگرال گیری استفاده می کنند . بنابراین، محاسبه تقریب هایی از انتگرال های نظیر

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

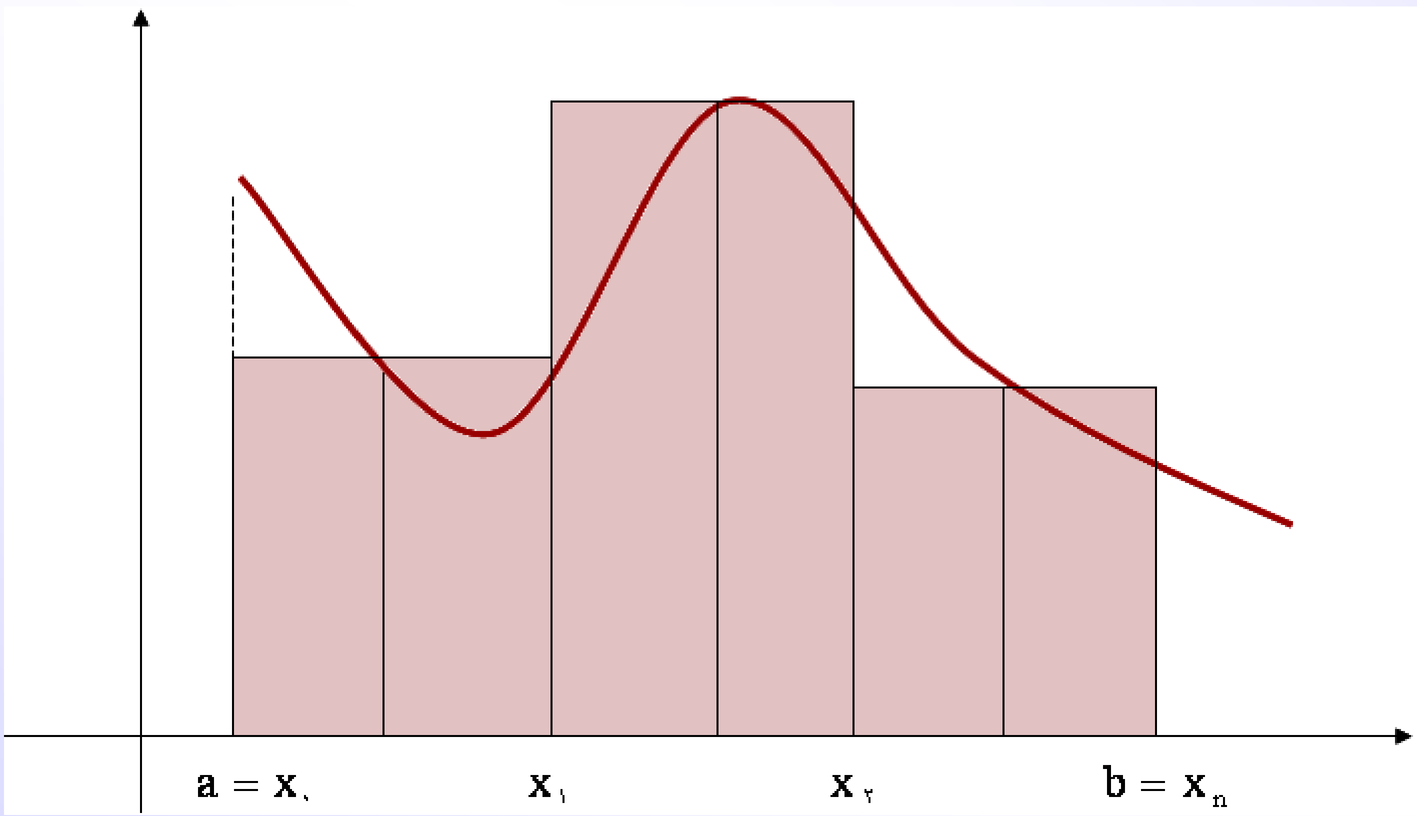
به این روشها میسر نیست . در این قسمت روش ساده ای را شرح می- دهیم که می توان تقریبهایی از $\int_a^b f(x)dx$ را وقتی $f(a)$ یا $f(b)$ نامعین هستند ، به وسیله آن حساب کرد.

۵-۴-۱ فرمول قاعده نقطه میانی

در این قاعده قرار می دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx +hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

شکل زیر چگونگی تقریب بالا را نشان می دهد.



با استفاده مکرر از(❊) فرمول این قاعده برای $\int_a^b f(x)dx$ به دست می آید:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+hf\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\ldots+hf\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)$$

که با فاکتورگیری از h نتیجه می دهد ،M حرف اول کلمه Midpoint است،

❊❊

$$\int_a^b f(x)dx \approx M(h)=h\left(f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\ldots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right)$$

ملاحظه می شود که در فرمول (❊❊) از مقدار تابع در x_0 و x_n یعنی a و b،

استفاده نشده است بنابراین ، می توان آن را برای انتـــــگرال هایی که در

آنها f(a) یا f(b)تعریف نشده اند به کار برید.

۵-۴-۲ مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2dx$ را ، به روش نقطه میانی ، و به ازای $h=\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ حساب کنید و خطای این مقادیر را به دست آورید

حل :

مقدار واقعی انتگرال برابر است با

$$\int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

به ازای $h=\frac{1}{2}=0.5$ داریم در نتیجه $\frac{h}{2}=\frac{1}{4}=0.25$

$$M(0.5) = 0.5((0.25)^2 + (0.75)^2) = 0.5(0.0625 + 0.5625)$$

$$= 0.5 + 0.625 = 0.3125$$

به ازای $h=\frac{1}{4}=0.25$ داریم $\frac{h}{2}=0.125$ در نتیجه

$$M(0.25)=0.25((0.125)+(0.375)+(0.625)+(0.875))$$
$$=0.25(0.015625+0.140625+0.390625+0.765625)$$
$$=0.25+1.3125=0.328125$$

$$EM(0.5)=\frac{1}{3}-M(0.5)=\frac{1}{3}-0.3125=0.02083 \qquad (5D)$$

$$EM(0.25)=\frac{1}{3}-M(0.25)=\frac{1}{3}-0.328125=0.00521 \qquad (5D)$$

مشاهده می شود که اولاً با نصف شدن h خطا $\frac{1}{4}$ می‌شود . ثانیاً این خطاها

نصف خطاهای به دست آمده ، به ترتیب $\frac{1}{24}$ و $\frac{1}{96}$ برای قاعده ذوزنقه ای هستند(مثال ۵-۲-۲). این نتایج برای حالت کلی در (۵-۴-۴) ثابت می شوند.

مثال ۵-۴-۳

تقریبی از $\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را حساب کنید.

حل:

اولاً مقدار واقعی انتگرال چنین به دست می آید :

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^{0.09} = 0.6$$

ضمناً با استفاده از فرمول ** به دست می آوریم (با انتخاب $h = 0.03$) :

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0.03(f(0.015) + f(0.045) + f(0.075))$$

$$= 0.03(8.165 + 4.7140 + 3.6515)$$

بنابراین

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}\approx 0.03\times 16.5305=0.495915$$

مشاهده می شود که این مقدار تقریبی حدود 0.104 خطا دارد که قابل توجه است .

از این رو ، توصیه می شود که در نزدیـــــکی نقاطی که f(a) یا f(b) بینهایت هستند مقدار h بسیار کوچک اختیار شود .

با انتخاب h = 0.01 به دست می آوریم

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}\approx 0.01\left(\frac{1}{\sqrt{0.005}}+\frac{1}{\sqrt{0.015}}+\frac{1}{\sqrt{0.025}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{0.085}}\right)$$

$$=0.539587$$

خطای این مقدار تقریبی حدود 0.07 است . به طور کلی در چنین انتگرالهایی باید برای قسمتی که نزدیک نقطه منفرد تابع است h را بسیار کوچک اختیار کرد و برای بقیه بازه h را خیلی کوچک نگرفت .

مثلاً قرار دهید

$$\int_0^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_0^{0.01}f(x)dx+\int_{0.01}^{0.09}f(x)dx$$

وبرای $\int_0^{0.01}f(x)dx$ مقدار h را 0.002 وبرای $\int_{0.01}^{0.09}f(x)dx$ مقدار h را 0.02

در نظربگیرید ، با این انتخابها به دست می آوریم

$$\int_0^{0.01}f(x)dx\approx 0.002\left(\frac{1}{\sqrt{0.001}}+\frac{1}{\sqrt{0.003}}+\frac{1}{\sqrt{0.005}}+\frac{1}{\sqrt{0.007}}+\frac{1}{\sqrt{0.009}}\right)$$

$$=0.002(31.6228+18.2574+14.1421+11.9523+10.5409)$$

$$=0.173031$$

همچنین داریم:

$$\int_{0.01}^{0.09} f(x)dx \approx 0.02\left(\frac{1}{\sqrt{0.02}}+\frac{1}{\sqrt{0.04}}+\frac{1}{\sqrt{0.06}}+\frac{1}{\sqrt{0.08}}\right)$$

$$=0.02(4.0711+5+4.0825+3.5355)$$

$$=0.02\times 19.6891=0.393782$$

پس

$$\int_{0}^{0.09}\frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0.173031+0.393782=0.566813$$

اختلاف این مقدار ، با مقدار واقعی 6 .0برابر است با 033187 .0 . اما برای کم کردن خطا ، h را باید کوچک گرفت، که در این صورت نیاز به کامپیوتر خواهد بود تا تعداد زیاد جملات را حساب کند.

۴-۴-۵ خطای قاعده نقطه میانی

ابتدا خطای تقریب * را حساب می کنیم . برای این منظور داریم:

$$f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)=f_i+\frac{h}{2}f_i'+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2}f_i''+\ldots \qquad (۱)$$

همچنین با توجه به مطالب گذشته

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=\left[x f_i+\frac{(x-x_i)^2}{2}f_i'+\frac{(x-x_i)^3}{6}f_i''+\ldots\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

که با توجه به این که $x_{i+1}-x_i=h$ چنین به دست می آید:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=hf_i+\frac{h^2}{2}f_i'+\frac{h^3}{6}f_i''+\ldots \qquad (۲)$$

از تفریق (۱) و (۲) داریم:

(۳)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f_i'' + \ldots \approx \frac{h^3}{24} f_i''$$

با مقایسه (۳) .(۱) نتیجه می گیریم که خطای قاعده نقطه میانی نصف خطای

قاعده ذوزنقه ای است . برای تعیین خطای کل چنین ادامه می دهیم :

$$EM(h) = \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) + \ldots + \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$\approx \frac{h^3}{24}\left(f_0'' + f_1'' + \ldots + f_{n-1}''\right)$$

که با استفاده از قضیه (۵-۲-۷) نتیجه می دهد

$$EM(h) \approx \frac{h^3}{24} \times nf''(\eta)$$

چون nh = b-a ، پس

$$EM(h) \approx \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\eta) \qquad (a \le \eta \le b)$$

و یا

$$|EM(h)| \le \frac{(b-a)h^2}{12} h^2 M_2$$

که در آن M_2 در $\max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)| \le M_2$ تعریف شده است. البته (۴) وقتی مفید است که M_2 متناهی باشد.

۵-۴-۵خصوصیات روش نقطه میانی

این روش ظاهراً بهتر از روش ذوزنقه ای است زیرا خطای آن نصف خطای روش ذوزنقه ای است و از یک مقدار تابع نیز کمتر استفاده می کند. علاوه براین ، برای انتگرال توابعی که در نقاط a یا b مقدار نامعین (بینهایت) دارند قابل استفاده است.اما قاعده ذوزنقه ای خاصیت جالبی داردکه نه روش نقطه میانی و نه قاعده سیمسون آن خاصیت را ندارند. فرض کنید به ازای h ثابتی $T(h)$ و $M(h)$ را حساب کرده اید . در $T(h)$ نقاطی که تابع در آنها باید حساب شود، عبارت انداز:

$$a, a+h, a+2h, \ldots, a+(n-1)h, b$$

ودر $M(h)$ نقاط عبارتند از:

$$a+\frac{h}{2}, a+\frac{3h}{2}, \ldots, a+(n-1)h+\frac{h}{2}$$

حال اگر بخواهیم $T(\frac{h}{2})$ و $M(\frac{h}{2})$ را به دست آوریم ، داریم:

برای $T(\frac{h}{2})$:

$$a, a+\frac{h}{2}, a+h, a+\frac{3h}{2}, \ldots, \underline{a+(n-1)h}, a+(n-1)h+\frac{h}{2}, b$$

برای $M(\frac{h}{2})$:

$$a+\frac{h}{4}, a+\frac{3h}{4}, a+\frac{5h}{4}, \ldots, b-\frac{h}{4}$$

مشاهده می شود که تمام نقاطی که برای محاسبه $T(h)$ به کار می روند در محاسبه $T(\frac{h}{2})$ نیز دیده می شوند(زیر آنها خط کشیده شده است) .بنابراین ، برای محاسبه $T(\frac{h}{2})$ می توان از مقادیر تابع که قبلاً حساب شده است استفاده کرد . ولی ، هیچ کدام ازنقاطی که در محاسبه $M(\frac{h}{2})$ به کار می روند از نقاطی که در محاسبه $M(h)$ به کار رفته اند نیستند!

برای قاعده سیمسون نیز ضریب مقادیر چنان است که نمی توان از محاسبات قبلی کمک گرفت $S(\frac{h}{2})$ را به کمک $S(h)$ حساب کرد. از خاصیت بالا در پیدا کردن مقادیر دقیقتر برای $\int_a^b f(x)dx$، با استفاده از مقادیر نا دقیق $T(h)$ ، استفاده می شود .

اشکال دیگر قاعده نقطه میانی آن است که ممکن است نتوان آن را برای برآورد مقدار انتگرال یک تابع جدولی به کار برد ، زیرا اگر مقدار تابع در نقـــاطی که در جدول نیست لازم باشد ابتدا باید از درونیابی استفاده و این مقادیر را بر آورد کرد.

۵-۴-۶ مثال

تقریبی از $\int_0^{1.2} f(x)dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر ، و روش نقطه میانی حساب کنید.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
f_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183	3.3201

حل:

برای استفاده از روش نقطه میانی و جدول مقادیر بالا، تنها می توان h را 0. 4 اختیار کرد . با انتخاب h = 0. 4 مقادیر تابع در نقاط زیر

$$0.2\ ,\ 0.6\ ,\ 1$$

مورد نیاز است .

بنابراین ،

$$\int_0^{1.2} f(x)dx \approx 0.4(f(0.2)+f(0.6)+f(1)) = 2.30472$$

اگر بخواهیم از $h = 0.2$ استفاده کنیم مقدار تابع در نقاط زیر مورد نیاز است

$$0.1\ ,\ 0.3\ ,\ 0.5\ ,\ 0.7\ ,\ 0.9\ ,\ 1.1$$

که هیچ کدام در جدول نیستند و باید مقادیر تبع را در این نقاط به کمک

درونیابی بر آورد کرد!

۵-۵ قاعده رامبرگ

با استفاده از قاعده رامبرگ ، و به کمک مقادیر تقریبی که از روشهای ساده ای همچون قاعده ذوزنقه ای و قاعده سیمسون برای $\int_a^b f(x)dx$ حساب می شود، و بدون محاســـــــبه تابع f در نقاط اضافی ، می توان تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)dx$ حساب کرد . اساس این روش بر این مطلب استوار است که می دانیم

$$I = \int_a^b f(x)dx = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \ldots \qquad (۱)$$

که در آن a_iها مستقل از h و متناسب با مشتق i ام تابع f هستند.

اگر در (۱) ، h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$I = T(\frac{h}{2}) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + a_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \qquad (۲)$$

برای حذف a_2 از معادلات (۱) و(۲) معادله (۱) را از چهار برابر (۲) کم می کنیم تا حاصل شود

$$4I - I = 4T(\frac{h}{2}) - T(h) + \frac{a_4}{4}h^4 - a_4h^4 + \frac{a_6}{16}h^6 - a_6h^6 + \dots$$

در نتیجه

$$I = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} - \frac{a_4}{4}h^4 - \frac{5a_6}{16}h^6 + \dots \qquad (۳)$$

رابطه بالا نشان می دهد که مقدار

$$\frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3}$$

تقریبی از I است که خطای ان متناسب با h^4 است (خطای T(h) و $T(\frac{h}{2})$ متناسب با h^2 است.)

۵-۵-۱ مثال

تقریب هایی از $\int_0^1 x^3 dx$ به قاعده ذوزنقه ای و با $h = 1, \frac{1}{2}$ حساب کنید و بعد به قاعده رامبرگ تقریب بهتری با استفاده از دو مقدار تقریبی حاصل را به دست آورید .

حل:

داریم

$$T(1) = \frac{1}{2}\left(0^3 + 1^3\right) = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(0^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1^3\right) = \frac{5}{16}$$

و بنا بر قاعده رامبرگ داریم:

$$\frac{4T\left(\frac{1}{2}\right) - T(1)}{3} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر ، $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ یعنی تقریبی که از قاعده رامبرگ به دست می آید با

مقدار واقعی انتگرال مساوی است . این نتیجه با استفاده از(۳) قابل توجیه است .

زیرا ، خطای کسر بالا مساوی است با

$$a'_4 h^4 + a'_6 h^6 + \dots$$

که در آن a'_i متناسب با مشتق i ام تابع $f(x) = x^3$ است .اما می دانیم که از

مشتق مر تبه چهارم به بعد این تابع صفر است ، در نیجه مقدار کسر با مقدار

واقعی انتگرال برابر است.

۵-۵-۲ تعمیم قاعده رامبرگ

در عمل تلفیقی از قاعده ذوزنقه ای و قاعده رامبرگ به کار می رود . ابتدا به قاعده ذوزنقه ای مقادیر زیر را حساب می شود

$$h_0 = (b-a) \qquad \vdots \qquad T(h_0) = T_{00}$$

$$h_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{h_0}{2} \qquad \vdots \qquad T(h_1) = T_{01}$$

$$h_2 = \frac{b-a}{2^2} \qquad \vdots \qquad T(h_2) = T_{02}$$

$$h_{k-1} = \frac{b-a}{2^{k-1}} \qquad \vdots \qquad T(h_{k-1}) = T_{0(k-1)}$$

$$h_k = \frac{b-a}{2^k} \qquad \vdots \qquad T(h_k) = T_{0k}$$

خطای T_{0i} متناسب با h_i^2 است . بعد به قاعده رامبرگ و به کمک T_{0i} ها مقادیر زیر را به دست می آوریم، که خطای هر یک متناسب با h^4 است:

$$T_{10} = \frac{4T_{01} - T_{00}}{3}$$

$$T_{11} = \frac{4T_{02} - T_{01}}{3}$$

$$\vdots$$

$$T_{1(k-1)} = \frac{4T_{0k} - T_{0(k-1)}}{3}$$

می توان باز هم به کمک T_{1i} ها تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)dx$ حساب کرد .

برای این منظور (۳) را چنین می نویسیم، برای h_i به جای h

$$I = T_{1i} + a_4' h_i^{\ 4} + a_6' h_i^{\ 6} + \dots \qquad (۴)$$

اگر در تساوی بالا به جای h_i مقدار $\frac{h_i}{2}$ را قرار دهیم به دست می آوریم

(۵)

$$I = T_{1(i+1)} + a_4'\left(\frac{h_i}{2}\right)^4 + a_6'\left(\frac{h_i}{2}\right)^6 + \ldots$$

حال (۴) را از 4^2 برابر (۵) کم می کنیم تا حاصل شود

$$I = 4^2\frac{T_{1(i+1)} - T_{1i}}{4^2 - 1} + a_6''h^6 + \ldots$$

که در آن a_6'' مستقل از h و متناسب با مشتق ششم تابع f است . به این ترتیب بعد از محاسبه T_{1i} ها به محاسبه T_{2i} ها (T_{2i} را تِ دو آی بخوانید) به قرار زیر می پردازیم .

$$T_{20} = \frac{4^2 T_{11} - T_{10}}{4^2 - 1}$$

$$T_{21} = \frac{4^2 T_{12} - T_{11}}{4^2 - 1}$$

$$\vdots$$

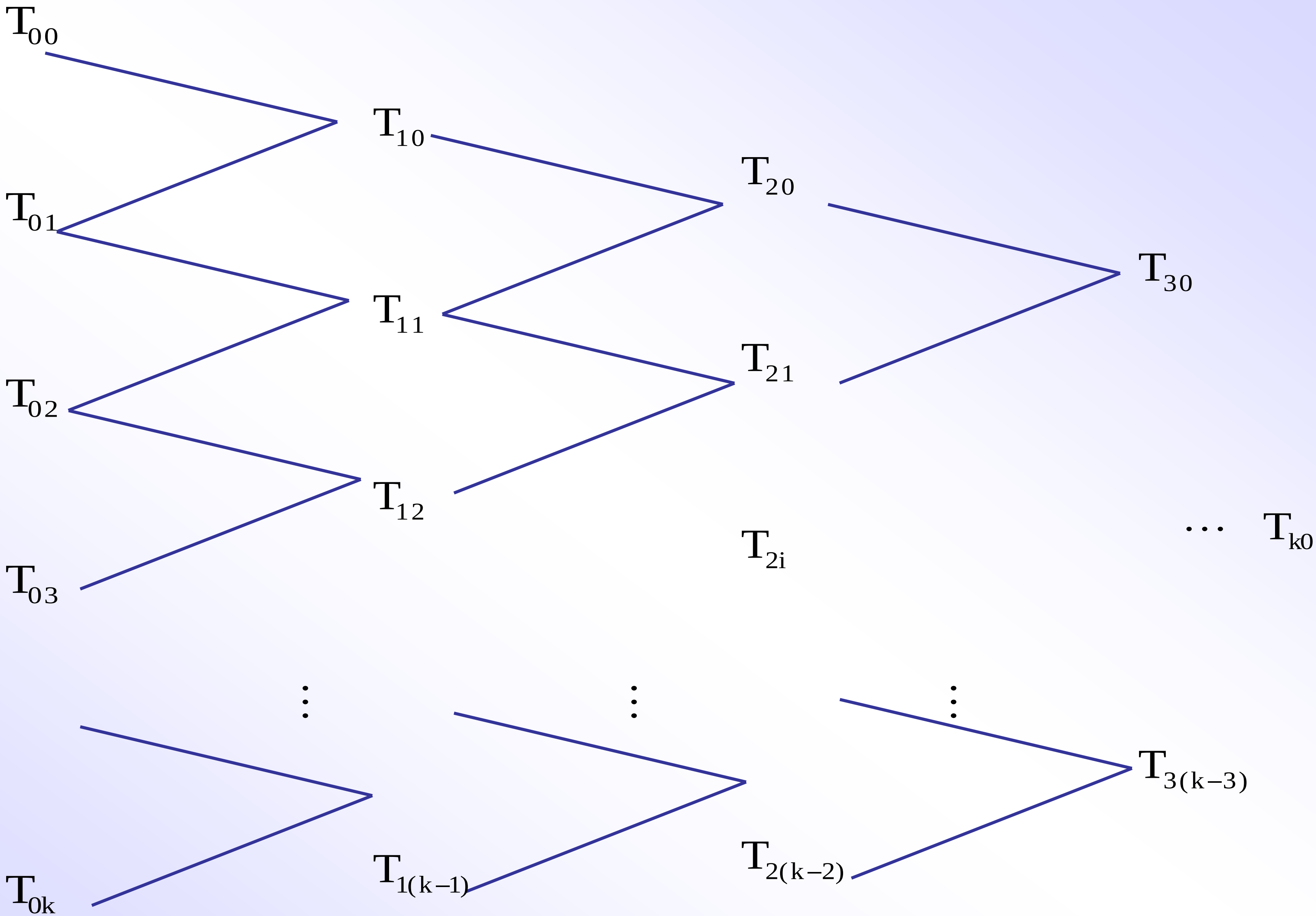
$$T_{2i} = \frac{4^2 T_{1(i+1)} - T_{1i}}{4^2 - 1}$$

در مرحله P ام از قاعده رامبرگ داریم

$$T_{pi} = \frac{4^p T_{(p-1)(i+1)} - T_{(p-1)i}}{4^p - 1} \quad , i = 0,1,2,\ldots \qquad p = 1,2,3,\ldots$$

و خطای T_{pi} متناسب با h_i^{2p+2} است و برای چند جمله ای های تا درجه 2p+1

دقیق است . با استفاده از فرمول بالا اعداد جدول زیر حساب می شوند:



T_{00}
T_{01}
T_{02}
T_{03}
T_{0k}
T_{10}
T_{11}
T_{12}
$T_{1(k-1)}$
T_{20}
T_{21}
T_{2i}
$T_{2(k-2)}$
T_{30}
$T_{3(k-3)}$
$\cdots$ T_{k0}

ثابت می شود که ،

$$\lim_{P\to\infty} T_{p0} = \int_a^b f(x)dx$$

بنابراین ، در عمل T_{p0} ها را حساب می کنیم و وقتی ، برای ε مفروض ، داشته باشیم

$$\left|T_{(p+1)0} - T_{p0}\right| < \varepsilon$$

عملیات را متوقف و $T_{(p+1)0}$ را به عنوان تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ می پذیریم . توجه داشته باشید که T_{pi} به کمک T_{0i} های اولیه که از قاعـــــده ذوزنقه ای حاصل می شوند به دست می آید و نیازی به محاسبه مجدد تابع ندارد.

۵-۵-۴ مثال

تقریب هایی از $\int_0^2 x^5 dx$ را به قاعده ذوزنقه ای به ازای $h = 2 , 1 , \frac{1}{2}$ حساب کنید و با استفاده از مقادیر حساب شده، و به قاعده رامبرگ ، تقریبی بهتر برای این انتگرال به دست آورید.

حل:

داریم $a = 0$, $b = 2$ و $f(x) = x^5$ بنابراین

$$T(2) = \frac{2}{2}\left(0^5 + 2^5\right) = 32$$

$$T(1) = \frac{1}{2}\left(0^5 + 2(1)^5 + 2^5\right) = 17$$

$$T\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(0^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2(1)^5 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^5 + 2^5\right) = \frac{197}{16}$$

حال جدول زیر را تشکیل می دهیم

$$T_{00}=32$$

$$T_{10}=\frac{4\times17-32}{3}=12$$

$$T_{01}=17$$

$$T_{20}=\frac{4^2\times\frac{43}{4}-12}{4^2-1}=\frac{32}{3}$$

$$T_{11}=\frac{\frac{197}{4}-17}{3}=\frac{43}{4}$$

$$T_{02}=\frac{197}{16}$$

از طرف دیگر

$$\int_0^2 x^5dx=\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^2=\frac{32}{3}$$

مشاهده می شود که مقدار T_{20} دقیقاً با مقدار انتگرال برابر است و این بدین خاطر

است که T_{20} برای توابع تا درجه $2\times2+1=5$ دقیق است (یعنی خطایش صفر است!)

۶-۵ قاعده های دقیقتر

اگر به فرمول قاعده ذوزنقه ای توجه کنید مشاهده می کنید که

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2} f_i + \frac{h}{2} f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} w_k f_k$$

که خطای آن نیز $\frac{h^3}{12} f''(\eta)$ است.

وهمچنین از فرمول قاعده سیمسون نتیجه می شود که

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx 3f_i + \frac{4h}{3} f_{i+1} + \frac{h}{3} f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} w_k f_k$$

و خطای آن $\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$ است .

بنابراین ، به طور کلی ، دنبال قواعدی می گردیم که در آنها

$$\int_{x}^{x_m} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f_k + E$$

در اینجا آنچه می تواند مجهول باشد نقاط $x_0, x_1, \dots, x_m$ و ضرایب $w_0, \dots, w_m$ است ، که در اینجا دو روش برای محاسبه آنها ارائه می کنیم . E نیز خطای $\sum_{k=0}^{m} w_k f_k$ است.

۵-۶-۱ روش نیوتن – کوتز

در این روش نقاط $x_0, x_1, \dots, x_m$ معلوم فرض می شوند ، مثلاً متساوی الفاصله و به صورت

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad , \qquad i = 0,1,2,\dots,m-1$$

بنابراین باید (m+1) مجهول $w_0, \dots, w_m$ به دست آید .

برای این منظور، در(۱) قرار می دهیم:

$$E = 0$$

وقتی که

$$f(x) = 1, x, \ldots, x^m$$

یعنی ، w_iها را چنان پیدا می کنیم که خطای $\sum_{k=0}^{m} w_k f_k$ برای چند جمله ای های تا درجه m صفر باشد. در زیر فرمول قاعده چهار نقطه ای یا قاعده $\frac{3}{8}$ را به دست می آوریم . برای این منظور ، بدون این که به کلیت خللی وارد شود قرار می دهیم $x_0 = 0$ ،

بنابراین، باید داشته باشیم

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} w_k f_k + E$$

که در آن $x_i = ih$ ، یعنی

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = h \quad , \quad x_2 = 2h \quad , \quad x_3 = 3h$$

حال برا ی به دست آوردن w_0 تا w_3 قرار می دهیم E = 0 وقتی که

$$f(x) = 1, x, x^2, x^3$$

به این ترتیب چهار معادله زیر حاصل می شود:

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} 1dx = 3h = w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} xdx = \frac{9h^2}{2} = hw_1 + 2hw_2 + 3hw_3$$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} x^2dx = 9h^3 = h^2w_1 + 4h^2w_2 + 9h^2w_3$$

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{3h} x^3dx = \frac{81h^4}{4} = h^3w_1 + 8h^3w_2 + 27h^3w_3$$

که پس از خلاصه کردن دستگاه زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 3h \\ w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \dfrac{9h}{2} \\ w_1 + 4w_2 + 9w_3 = 9h \\ w_1 + 8w_2 + 27w_3 = \dfrac{81h}{4} \end{cases} \qquad (۱)$$

معادلات سوم و چهارم، پس از حذف w_1 به کمک یه معادله دوم ، به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{cases} 2w_2 + 6w_3 = \dfrac{9h}{2} \\ 6w_2 + 24w_3 = \dfrac{63h}{4} \end{cases} \qquad (۲)$$

اگر w_2 را نیز از معادله دوم دستگاه اخیر حذف کنیم حاصل می شود:

$$6w_3 = \frac{9h}{4} \Rightarrow w_3 = \frac{3h}{8}$$

از معادله (۲) به دست می آید

$$w_2 = \frac{9h}{8}$$

سپس از معادله دوم (۱) حاصل می شود

$$w_1 = \frac{9h}{8}$$

و بالاخره از معادله اول (۲) به دست می آوریم

$$w_0 = \frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه ای عبارت است از

$$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h))$$

که با تغییر متغیر $X = x_0 + x$ به صورت زیر در می آید

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

که در آن طبق معمول ،

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad f_i = f(x_i)$$

روش فوق به روش **ضرایب مجهول** نیز معروف است .

فرمول های نیوتن – کوتز پنج نقطه ای و... نیز به همین ترتیب به دست می آیند.

در زیر جدول مربوط به این فرمولها ، ضرایب و خطای آنها ، آمده است . به طور کلی داریم:

$$\int_{x}^{x_m} f(x)dx = A_0\sum_{k=0}^{m} a_k f_k + A_1 h^{l+1} f^{(l)}(\eta) \qquad (۳)$$

که در آن $\eta \in [x_0, x_m]$

$$l = \begin{cases} m+1 & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ m+2 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

پس بهتر است از فرمول هایی استفاده کنیم که در آنها m زوج است.

m	A_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1
1	$\frac{1}{2}$	١	١				$\frac{-1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	١	٤	١			$\frac{-1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	١	٣	٣	١		$\frac{-3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	٧	٣٢	١٢	٣٢	٧	$\frac{-8}{905}$
5	$\frac{1}{140}$	١٩	٧٥	٥٠	٥٠	٧٥	$\frac{-9}{2096}$
6	$\frac{7}{17280}$	٤١	٢١٦	٢٧	٢٧٢	٢٧	$\frac{-8183}{518400}$
7	$\frac{4}{14175}$	٧٥١	٣٥٧٧	١٣٢٣	٤٩٨٩	٢٩٨٩	$\frac{-2368}{467775}$
8		٩٨٩	٥٨٨٨	-٩٢٨	١٠٩٤٢	-٤٥٤٠	

جدول (١)

آنچه از جدول (۱) نتیـــجه می شود آن است که ضرایب جملات متــــساوی البعد از طرفین برابرند . تا $m = 7$ ضرایب همـــگی مثبت ولی برای $m = 8$ بعضی ضرایب منفی هستند . اصولاً توصیه می شود ، با توجه به این که محاســـبه f_i ها توأم با خطاست وبرای m های بزرگ ضرایب a ممکن است منفی باشـــــند، فرمول های نیوتن – کوتز را برای m های کوچک به کار برید . بخصوص m های زوج را اختیار کنید و مثلاً با توجه به (۳) فرمول های ۳ نقطه (یعنی قاعده سیمسون)و ۴ نقطه ای (یعنی قاعده $\frac{3}{8}$) هر دو برای چند جمله ایهای تا درجه سوم دقیق هستند.

اما روش سیمسون از یک نقطه کمتر استفاده می کند و قدر مطلق خطای آن (یعنی، $\frac{1}{90}$) از قدر مطلق خطای قاعده $\frac{3}{8}$ (یعنی $\frac{3}{80}$) نیز کوچکتر است.

۵-۶-۲ روش گاوس

در این روش نقاط و ضرایب همگی مجهول فرض می شوند پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f_k + E$$

(m+1) نقطه $x_0, x_1, \ldots, x_m$ و (m+1) ضریب $w_0, \ldots, w_m$ مجهول هستند. جهت به دست آوردن این 2m+2 مجهول قرار می دهیم E = 0 برای

$$f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2m+1}$$

به عبارت دیگر کاری می کنیم که $\sum_{k=0}^{m} w_k f_k$ برای چند جمله ای ایهای تا درجه 2m+1 دقیق باشد.

واضح است که این روش از روش های متناظر در روش نیوتن – کوتز دقیقتر است.

۵-۶-۳ فرمول قاعده دو نقطه ای گاوس

به دلایلی که بعدا شرح می دهیم ، فرمول گاوس را برای بازه [-1, 1] به دست می آوریم . واضح است که بازه های [a,b] و [-1, 1] را به ســـادگی می توان به هم تبدیل کرد . با تغییر متغیر

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b-a)]$$

به دست می آوریم:

$$dx = \frac{(b-a)}{2}du$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 \psi(u)du$$

که در آن

$$\psi(u) = \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{1}{2}[(b-a)u + (b-a)]\right)$$

پس ، فرمول دو نقطه ای گاوس را برای

$$\int_{-1}^1 f(x)dx$$

به دست می آوریم.

می خواهیم داشته باشیم

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{1} w_k f_k + E$$

برای تعیین x_1, x_0 و w_1, w_0 قرار می دهیم $E = 0$ برای

$$f(x) = 1, x, x^2, x^3$$

همان طور که در روش نیوتن – کوتز عمل کردیم ، در اینجا نیز دستگاه زیر

حاصل می شود:

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = w_0 + w \qquad (1)$$

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} xdx = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \qquad (۲)$$

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \qquad (3)$$

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \qquad (۴)$$

مشاهده می شود که چهار معادله و چهار مجهول داریم که نسبت به w_1, w_0 خطی

ولی نسبت به x_1, x_0 غیر خطی هستند (مشکل حل این دستگاهها تا مدتی

مانع از کاربرد آنها بود) . این دستگاه را به طریق زیر حل می کنیم.

معادله (2) را در ضرب و با معادله (4) جمع می کنیم تا حاصل شود

$$w_1 x_1^3 - w_1 x_0^2 x_x = 0$$

بنابراین، باید داشته باشیم

$$w_1 x_1 (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0 \qquad (۵)$$

در زیر ثابت می کنیم که تنها $(x_1 + x_0) = 0$ و بقیه عوامل سمت چپ تساوی

(۵)مخالف صفر هستند. این مطلب را به برهان خلف ثابت می کنیم . فرض کنید

$$w_1 x_1 = 0 \qquad (۶)$$

از این تساوی و (2) نتیجه می گیریم

$$w_0 x_0 = 0$$

(7)

(6) و (۷) و (۳) نتیجه می دهند

$$\frac{2}{3} = 0$$

که یک تناض است . پس فرض $w_1 x_1 = 0$ باطل است و $w_1 x_1 \neq 0$ باز هم فرض می کنیم

$x_1 - x_0 = 0$ که از آن نتیجه می شود

$$x_1 = x_0$$

(۸)

(۸) و(۲) نتیجه می دهند

$$0 = (w_0 + w_1) x_1$$

(۹)

که با توجه به (۱) نتیجه می گیریم

$$0 = 2x_1$$

که خلاف $w_1x_1 \neq 0$ است (چرا؟) پس

$$x_1 - x_0 \neq 0$$

از این رو ، باید داشته باشیم

$$x_1 + x_0 = 0$$

یعنی،

$$x_1 = -x_0$$

چون x_0 و x_1 صفر نیستند و معمولاً x_0 کوچکتر از x_1 فرض می شود

(۱۰)

$$x_1 > 0 \;, \quad x_0 < 0$$

از (۹) و(۳) به دست می آوریم

$$\frac{2}{3} = w_0x_0^2 + w_1x_0 = (w_0 + w_1)x_0^2$$

که با توجه به (۱) نتیجه می دهد

$$x_0^2 = \frac{1}{3}$$

بنابراین ، با توجه به (۱۰) ،

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و

$$x_1 = -x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ضمناً از (۹) و (۲) نتیجه می شود که

$$0 = w_0 x_0 + w_1 x_0 = (w_0 + w_1) x_0$$

که چون $x_0 \neq 0$ نتیجه می دهد

$$w_0 + w_1 = 0$$

از (۱) و(۱۱) به دست می آوریم

$$w_0 = w_1 = 1$$

بنابراین ، فرمول دو نقطه ای گاوس عبارت است از

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

این فرمول برای چند جمله ایهای تا درجه سوم دقیق است (مطابق آنچه عمل کردیم) و تنها از دو مقدار تابع استفاده می کند.بنابراین ، قاعده دونقطه گاوس از نظر دقت و خطا تقریباً نظیر قاعده سیمسون است که از سه مقـــدار تابع استفاده می کند ، در نتیجه از آن بهتر است.

خوشبختانه مقادیر $w_1, w_0,\ldots,x_1, x_0$ حساب شده اند و در جدو لهایی در اختیار استفاده کنندگان از این روش قرار می گیرند .جدول (۲) این مقادیر را نشان می دهد .

از جمله خصوصیات این دسته از فرمولهای انتگرالگیری گاوس این است که اگر m فرد باشد تعداد نقاط زوج است و داریم :

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i \\ w_{m-i} = w_i \end{cases} \quad , \ i = 0,1,\dots,\frac{m-1}{2} \qquad (*)$$

و اگر m زوج باشد تعداد نقاط فرد است و داریم

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i \quad , \quad i = 0,1,\dots,\frac{m}{2}-1 \\ x_{\frac{m}{2}} = 0 \\ w_{m-i} = w_i \quad , \quad i = 0,1,\dots,\frac{m}{2}-1 \end{cases} \qquad (**)$$

خصو صیات مندرج در (*) و(**) در جدول (۲) آمده است .

m	x_i	w_i
1	$x = -x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$w_1 = w_0 = 1$
2	$x_1 = 0$ $x_2 = -x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$w_1 = \frac{8}{9}$ $w_2 = w_0 = \frac{5}{9}$
3	$x_2 = -x_1 \approx 0.33998104$ $x_3 = -x_0 \approx 0.86113631$	$w_2 = w_1 \approx 0.65214515$ $w_3 = w_0 \approx 0.34785485$
4	$x_2 = 0$ $x_3 = -x_1 \approx 0.53846931$ $x_4 = -x_0 = 0.90617985$	$w_2 = 0.56888889$ $w_3 = w_1 = 0.47862867$ $w_4 = w_0 = 0.23692689$

جدول (۲)

از خصوصیات بارز فرمولهای انتگرالگیری گاوس آن است که تمام ضرایب w_i

مثبت هستند و مهمتر اینکه $|w_i| \leq 1$. این ویژگی و دقت بالای این

فرمولهای استفاده از آنها را اجتناب ناپذیر می کند . تنها اشکال روش انتگرال

گیری گاوس استفاده از بازه [-1,1] است که $\int_a^b f(x)dx$ باید به $\int_a^b \psi(u)du$

تبدیل شود . اشکال دیگر ، که با ظهور کامپیوتر ها عمده نیست ، اصم بودن

نقاط و ضرایب است که استفاده از این روشهارابا دست خسته کننده می کند .

ولی بایک برنامه کامپیوتری می توان یکبار، و برای همیشه ، نقاط و ضرایب را

کامپیوتر داد و برای همیشه از آنها استفاده کرد.

۵-۶-۴ مثال

۱- با استفاده از فرمول چهار نقطه ای گاوس تقریبی از انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int_1^3 \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

حل:

با تغییر متغیر x = u+2 داریم

$$I = \int_1^3 \frac{\sin^2 (u+2)}{(u+2)} du$$

که با توجه به جدول (۲) ، به ازای n = 3 به دست می آوریم

$$I \approx 0.7942833$$

۲- فرمول چهار نقطه ای گاوس را برای محاسبه تقریبی از انتگرال زیر به کار برید.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$$

حل:

با تغییر متغیر $x = \frac{\pi}{4}(u+1)$ به دست می آوریم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin \frac{\pi(u+1)}{4}\,du = 1.000000$$

می توانید تحقیق کنید که تقریب ۱٫۰۰۰۰۰۰ را با ۶۵ نقطه و به قاعده سیمسون می توان به دست آورد!