بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای

گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ : واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل پنجم :روابط بازگشتی

یک دنباله را به روش های متنوع می توان تعریف کرد:

1- نوشتن چندین جمله اول به امید رسیدن به یک الگو یا فرمول عمومی (ابهام انگیز است).

2- ارائه یک فرمول صریح برای جمله nام.

3- استفاده از مفاهیم بازگشتی.

- روش سوم اولا به یک معادله به نام رابطه‌ی بازگشتی نیاز دارد که جمله nام را به چند جمله قبلی مرتبط می‌کند. و ثانیا مقادیر چند جمله‌ی اول را می‌خواهد که به آنها شرایط مرزی می‌گوییم.(دنباله فیبوناتچی)

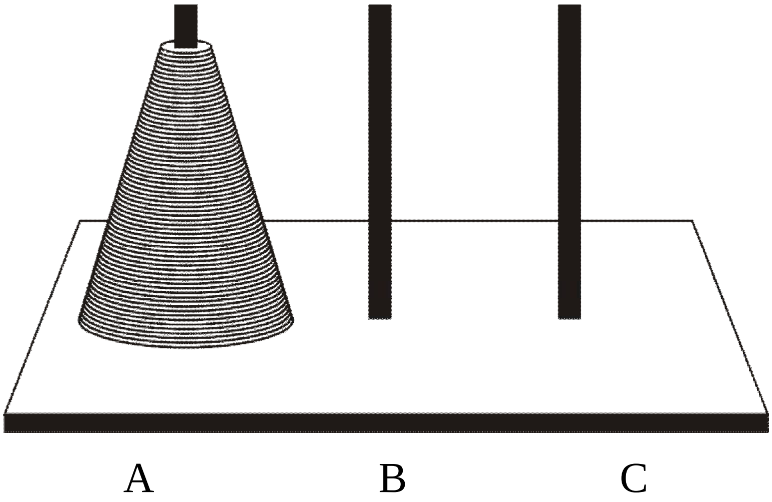
- تعریف دنباله به صورت بازگشتی معادل به کار بردن استقرای ریاضی است. شرایط مرزی مثابه پایه استقرا و رابطه بازگشتی مثابه مرحله استقراست.

تعریف: یک رابطه بازگشتی فرمولی است که جمله nام را به k جمله پیشین مرتبط می‌سازد که $k \geq 1$ و $n \geq k$. شرایط مرزی ارائه مقادیر برای $a_{k-1},...,a_1,a_0$ است. k مرتبه‌ی رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد.

- یک رابطه بازگشتی با شرایط مرزی متفاوت دنباله های متعدد تولید می‌کند.

* حل یک مسئله بصورت بازگشتی به معنای پیدا کردن راهی برای شکستن مسئله مزبور به زیر مسائلی است که صورت ظاهری آن ها مشابه به مسئله اولیه است. این روند تکرار می شود تا آخرین زیر مسئله به سادگی حل شود. گام بعدی تلفیق و ترکیب جواب های حاصل و به دست آوردن جواب کلی است. این فرض که زیر مسائل کوچکتر قبلا حل شده اند به تفکر بازگشتی معروف است. این سنت مشابه فرض استقرا در اثبات قضایاست.

مثال: برج هانوی ← بنابه افسانه ها یک معبد هندی دارای سه ستون الماس است که خداوند 64 حلقه طلا به ترتیب نزولی قطرشان از پایین به بالا روی آنها قرار داده. راهبه ها باید این حلقه ها را به ستون آخر منتقل کنند و هرگز نباید یک حلقه بزرگتر روی کوچکتر قرار گیرد. اگر با اتمام کار، عمر جهان پایان یابد عمر جهان چقدر است؟



راه حل بازگشتی اینچنین است که فرض می کنیم راهی برای انتقال $n-1$ حلقه به ستون دوم پیدا کرده‌ایم، حال باید حلقه‌ی آخر را به ستون سوم اضافه کرد و سپس $1-n$ حلقه را به ستون سوم رساند. حال اگر a_n، $n \geq 1$ حداقل انتقال‌های لازم برای جابجایی n حلقه از یک ستون به ستون دیگر باشد می‌بینیم برای انتقال $n-1$ حلقه از A به B، a_{n-1} انتقال و برای انتقال حلقه n ام به C به یک انتقال و برای انتقال $n-1$ حلقه از B به C، a_{n-1} انتقال نیاز است پس $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ و شرط مرزی $a_1 = 1$ است. پس رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ است

مثال: دنباله فیبوناتچی ⟵ این رابطه منصوب به لئوناردو پیزا ریاضیدان قرون وسطایی است و بر این اساس است که: در ابتدای سال یک جفت خرگوش داریم. هر جفت خرگوش در ماه اول تولد صاحب بچه نمی‌شوند ولی در ماه های دیگر یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند و هیچ خرگوشی از بین نمی‌رود. تعداد خرگوش‌ها در انتهای سال؟

تعداد خرگوش‌های متولد شده ماه n ام برابر تعداد خرگوش‌های ماه $n-2$ است زیرا خرگوش‌های ماه $n-1$ هنوز تولید مثل نکرده اند پس اگر F_0 تعداد خرگوش‌های ماه n ام باشد، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ و $F_0 = 1$ و $F_1 = 1$ است.

مثال: مجموعه اعداد دودویی n رقمی فاقد الگوی 11 چند عضو دارد؟

می دانیم $S_0=0$ و $S_1=2$ و می دانیم که برای ساختن اعداد n رقمی باید به اعداد $n-1$ رقمی 0 یا 1 اضافه کنیم. اضافه کردن 0 مشکلی ایجاد نمی کند، پس به همان تعداد $n-1$ رقمی عدد داریم ولی در اضافه کردن 1 باید مواظب باشیم الگوی 11 ایجاد نشود، بنابراین داریم $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ و $n\geq 2$.

مثال: تعداد افرازهای ممکن یک مجموعه n عضوی به r زیرمجموعه‌ی غیر تهی که با $S_{n,r}$ نشان می‌دهیم را حساب کنید. اعداد $S_{n,r}$ به اعداد استرلینگ نوع دوم معروف هستند.

این مجموعه را می توان به دو گروه شامل $\{x_n\}$ و فاقد $\{x_n\}$ تقسیم کرد. تعداد افرازهای $S_{n,r}$ که شامل $\{x_n\}$ باشند که با تعداد $S_{n-1,r-1}$ برابر است اما تعداد گروه دوم برابر $rS_{n-1,r}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} S_{n,r}=S_{n-1,r-1}+rS_{n-1,r} & 1\leq r\leq n \\ S_{n,1}=1, S_{n,n}=1 & n\geq 1 \end{cases}$$

گاهی از اوقات، بویژه وقتی به جملات با اندیس بزرگتر نیاز داریم یا خواص عمومی دنباله را می‌خواهیم به فرمول صریح نیاز داریم که آن را جواب رابطه بازگشتی گوییم.

حل روابط بازگشتی با استفاده از جایگزاری با تکرار:

این روش برای حل روابط بازگشتی مرتبه اول بسیار مناسب است.

مثال:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+f(n) & n\geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_0+\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$a_1 = a_0+f(1),\ a_2 = a_0+f(1)+f(2), \ldots$$

$$\begin{cases} a_n = ca_{n-1}+f(n) & n\geq 1 \\ a_0 \quad \text{const} \end{cases} \Rightarrow a_n = c^n a_0+\sum_{k=1}^{n} c^{n-k} f(k)$$

$$a_1 = ca_0+f(1),\ a_2 = c^2a_0+cf(1)+f(2), \ldots$$

مثال:

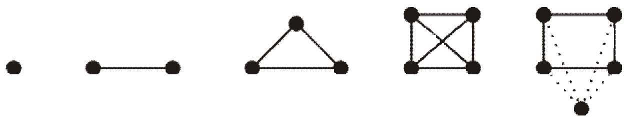
$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}+1 & n\geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow c=2,\ f(n)=1$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = 2^{n-1}+\ldots+2^0 = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$$

مثال:مرتب سازی حبابی را در نظر بگیرید. تعداد مقایسه‌های لازم را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \ge 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

k_n شکلی است که از ترسیم یک n ضلعی با تمام اقطارش حاصل شده(گراف کامل) تعداد یالهای آن از رابطه‌ی $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \ge 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$ بدست می آید.



k_1 k_2 k_3 k_4 k_5

تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب سازی ادغامی: در این روش ابتدا آرایه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را با تقسیم‌های متوالی به قسمت‌های دیگر تقسیم می‌کنیم، سپس مرتب سازی در راه بازگشت صورت می‌پذیرد و با هم ادغام می‌شوند.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + n - 1 & n \ge 2,\ n = 2^m \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$2a_{\frac{n}{2}} = 2\left(2a_{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2} - 1\right) = 2^2 a_{\frac{n}{4}} + n - 2$$

$$2^2 a_{\frac{n}{4}} = 2^2\left(2a_{\frac{n}{8}} + \frac{n}{4} - 1\right) = 2^3 a_{\frac{n}{8}} + n - 2^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_n - 2a_{\frac{n}{2}} &= n - 2^0 \\ 2a_{\frac{n}{2}} - 2^2 a_{\frac{n}{4}} &= n - 2^1 \\ &\ \,\vdots \\ 2^{m-1} a_{\frac{n}{2^{m-1}}} - 2^m a_{\frac{n}{2^m}} &= n - 2^{m-1} \end{aligned}\right\}^{+} \Rightarrow a_n = (n - 2^0) + (n - 2^1) + \dots + (n - 2^{m-1})$$

$$= mn - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{m-1}) = mn - (2^m - 1)$$

$$= mn - n + 1 \xrightarrow{m=\log_2^n} a_n = n\log_2^n - n + 1$$

- رابطه بازگشتی حالت خاصی از روابط تقسیم و حل است. این روابط برای تجزیه و تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی به کار می‌روند. فرمول عمومی یک رابطه‌ی تقسیم و حل به صورت $a_n = ca_{n/d} + f(n)$ است که c و d ثابت و $f(n)$ تابعی از n است.

حل روابط بازگشتی با استفاده ازمعادله مشخصه:

تعریف: اگر $k \in z^{+}$ و $c_{n-k}(\neq 0),\ldots,c_{n-1}(\neq 0),c_n(\neq 0)$ اعداد حقیقی و a_n یک دنباله باشد آنگاه $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = f(n),\quad n \geq k$ یک رابطه بازگشتی از مرتبه‌ی k است. اگر $\forall n \geq 0$، $f(n)=0$ رابطه بازگشتی را همگن(متجانس) و در غیر این صورت ناهمگن گوییم.

روابط بازگشتی همگن مرتبه دو: $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0,\quad n \geq 2$

$c_n = cr^n$ در نظر گرفته می‌شود پس داریم $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ و $r, c \neq 0$. به این معادله، معادله مشخصه می‌گوییم. که اگر r_1, r_2 ریشه‌های آن باشند سه حالت داریم:

1) $r_1 \neq r_2 \in R$

2) $r_1 = r_2 = r$

3) $r_1 \neq r_2$ و هردو مختلط هستند.

1) در حالت اول جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی هستند که با دانستن شرایط مرزی مشخص می‌شوند.

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 & n \geq 2 \\ a_0 = 1,\ a_1 = 2 \end{cases}$$

معادله مشخصه: $r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -3$

$$\Rightarrow a_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n \Rightarrow \begin{cases} a_0 = c_1 2^0 + c_2(-3)^0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = c_1 2^1 + c_2(-3)^1 \Rightarrow 2c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2^n$$

مثال: عبارت محاسباتی مجاز بدون پرانتز شامل 0 تا 9 و +،* و / را در نظر می‌گیریم. اگر a_n تعداد این محاسبات مجاز باشد بدیهی است $a_1 = 10$ و $a_2 = 100$ و $n \geq 3$، $a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}$ چرا که در عبارات $n-1$ علامتی فقط یک عدد می‌توان اضافه کرد اما به $n-2$ علامتی‌ها می‌توان یکی از 29 علامت $+0,\ldots+9,*0,\ldots,*9,/1,\ldots,/9$ را اضافه کرد.

$$\begin{cases} a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2} & n \geq 3 \\ a_1 = 10,\ a_2 = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2 - 10r - 29 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = 5 \pm 3\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{5}{3\sqrt{6}} \text{[illegible]}$$

2) در حالتی که ریشه ها موهومی‌اند باز جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ است که c_1 و c_2 موهومی‌اند. در عین حال وقتی ضرایب رابطه بازگشتی حقیقی است، جواب عمومی حاصل نیز حقیقی است.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad n \ge 0$$

$$z = x + iy \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad n \ge 0$$

3) در حالتی که معادله‌ی مشخصه دارای ریشه مضاعف $r = r_1 = r_2$ است، جواب عمومی به صورت $a_n = (c_1 + nc_2)r^n$.

در حالت عمومی، اگر $c_n a_n + \dots + c_{n-k} a_{k-1} = 0$ و $c_n \neq 0$ ، $c_{n-k}, \dots, c_{n-1}$ اعداد حقیقی و r یک ریشه تکراری با مرتبه m، $z \le m \le k$ باشد. آن قسمت از جواب عمومی که مربوط به ریشه‌ی r است عبارت است از $(A_0 + A_1 n + \dots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$ که $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ ثابت‌های دلخواهی هستند.

مثال:

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} - 4a_n, & n \ge 0 \\ a_0 = 3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 22 \end{cases} \Rightarrow r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = -1$$
$$\Rightarrow a_n = (A_0 + A_1 n)2^n + c(-1)^n$$

از جایگذاری شرایط مرزی داریم:

$$A_0 = 1,\ A_1 = 2,\ c = 2 \Rightarrow a_n = (1 + 2n)2^n + 2(-1)^n$$

روابط بازگشتی ناهمگن خطی با ضرایب ثابت:

رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه k و با ضرایب ثابت $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n),\ n \ge k$ که $c_{n-k} \neq 0, \dots, c_{n-1}, c_n \neq 0$ اعداد ثابت حقیقی و $f(n)$ یک تابع غیر صفر است.

- رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه 2 $\longleftarrow$ $a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n),\ n \ge 2$ ، $c \neq 0$ و $f(n)$ تابع غیر صفر.

جواب عمومی این رابطه به صورت $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ که $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطه‌ی بازگشتی همگن $a_n + ca_{n-1} + ba_{n-2} = 0$ است و $a_n^{(p)}$ یک جواب ویژه که بسته به $f(n)$ از راه‌های زیر بدست می آید.

1) $f(n)$ بصورت یکی از حالت‌های جدول باشد و جوابی برای رابطه بازگشتی همگن نباشد $a_n^{(p)}$ هم مثل ستون دوم است.

2) $f(n)$ حاصل جمعی از توابع ستون اول باشد $a_n^{(p)}$ هم حاصل جمع جملات متناظر در ستون دوم خواهد بود.

3) وقتی یکی از جمعوندهای تابع $f(n)$ مثل $f_1(n)$ جوابی برای رابطه‌ی بازگشتی همگن باشد یعنی $f_1(n)=cr^n$ یا $f_1(n)=(c_1+c_2n)r^n$ که در آن r ریشه معادله مشخصه است. در چنین حالتی جواب ویژه‌ی منسوب به $f_1(n)$ را به کوچکترین توانی از n مثل n^s که در آن هیچ جمعوندی از $n^s f_1(n)$ نباشد ضرب می‌کنیم. در این حالت $n^s f_1(n)$ قسمت متناظر از $a_n^{(p)}$ است.

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
c ثابت	A ثابت
n	A_0+A_1n
n^2	$A_0+A_1n+A_2n^2$
$n^t \quad t\in Z^+$	$A_0+A_1n+\ldots+A_{t-1}n^{t-1}+A_tn^t$
$r^n \quad r\in R$	Ar^n
$\sin a\, n$	$A\sin a\, n+B\cos a\, n$
$\cos a\, n$	$A\sin a\, n+B\cos a\, n$
$n^t r^n$	$r^n(A_0+A_1n+\ldots+A_{t-1}n^{t-1}+A_tn^t)$
$r^n\sin a\, n$	$Ar^n\sin a\, n+Br^n\cos a\, n$
$r^n\cos a\, n$	$Ar^n\sin a\, n+Br^n\cos a\, n$

توابع مولد:

مثال: اگر بخواهیم 12 پرتقال را بین بین 3 نفر به ترتیبی که اولی حداقل 4 تا، دومی حداقل 2 تا و سومی حداقل 2 تا و حداکثر 5 تا داشته باشند تقسیم کنیم چند حالت داریم؟

ضریب x^{12} برابر تعداد حالات است.

f [redacted] $+x^5+x^6+x^7+x^8$ [redacted] x^3 [redacted] $+x^4+x^5+x^6$ [redacted] x^3 [redacted] $+x^4+x^5$ | ← تابع مولد

مثال: 24 توپ را از بین تعداد نامحدود توپ‌هایی با رنگ‌های قرمز ، سبز ، سفید و سیاه به گونه‌ای انتخاب کنیم که حداقل 6 توپ سیاه و به تعداد زوج توپ سفید داشته باشیم.

ضریب x^{24} جواب مساله است.

f [redacted] $+x^1+\ldots+x^{18}$ [redacted] x^1 [redacted] $\ldots+x^{24}$ [redacted] $x^2+x^4+\ldots+x^{18}$ |

تعریف: فرض کنید که $a_0,\ldots a_6,\ldots$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد تابع $f(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ را تابع مولد رشته‌ی مزبور گوییم.

مثال: $(1+x)^n$ تابع مولد برای رشته‌ی $c_n^0,c_n^1,c_n^2,...,c_n^n,0,0,0,...$ است.

- برای هر $n\in Z^+$ قضیه دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر است.

$$\forall n\in Z^+ \quad (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + ... + c_n^n x^n$$

این فرمول را برای nهای منفی و حقیقی می‌توان تعمیم داد:

$$\forall n,r\in Z^+,\ n\ge r\ge 0 \quad c_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

$$\forall n\in Z^+ \quad c_{-n}^r = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)...(-n-r+1)}{r!} = \frac{(-1)^r(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = (-1)^r c_{n+r-1}^r$$

اگر $\Rightarrow$

$$\forall n \quad c_n^0 = 1$$

مثال: برای $n\in Z^+$ بسط سری مک‌لورن برای $(1+x)^{-n}$ به صورت زیر است.

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + ... + ... = 1 + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)...(-n-r+1)}{r!}x^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c_{n+r-1}^r x^r$$

لذا $(1+x)^{-n}$ تابع مولد رشته‌ی $c_{-n}^0,c_{-n}^1,c_{-n}^2,....$ است.

نکات مهم:

1- $(1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + ... + c_n^n x^n$

2- $(1+ax)^n = c_n^0 + c_n^1 ax + c_n^2 a^2 x^2 + ... + c_n^n a^n x^n$

3- $(1+x^m)^n = c_n^0 + c_n^1 x^m + c_n^2 x^{2m} + ... + c_n^n x^{nm}$

4- $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n$

5- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

6- $\frac{1}{(1+x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 x + c_{-n}^2 x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-n}^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{n+k-1}^k x^k$

7- $\frac{1}{(1-x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1(-x) + c_{-n}^2(-x)^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-n}^k(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k-1}^k x^k$

اگر $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ و $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$ و $h(x)=f(x)g(x)$ ، آنگاه $h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ که در آن $c_k=\sum_{i=0}^{\infty}a_i b_{k-i}$ و $k\ge 0$.

مثال: ضریب x^{15} را در $f(x)=(x^2+x^3+\dots)^4$ بدست آورید.

$$f(x)=\left(x^2(1+x+x^2+\dots)\right)^4=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4=\frac{x^8}{(1-x)^4}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{r=0}^{\infty} c^{r}_{n+r-1}\,x^r \Rightarrow c^{7}_{11}=120$$

ضریب x^{15} در $f(x)$ مثل ضریب x^7 در $\frac{1}{(1-x)^4}$ می‌باشد.

مثال: نشان دهید برای هر $n\in Z^+$، $c^n_{2n}=\sum_{i=0}^{n}(c^i_n)^2$

می‌دانیم $(1+x)^{2n}=[(1+x)^n]^2$ ، c^n_{2n} ضریب x^n در $(1+x)^{2n}$ است.

$$\Rightarrow \left(c^0_n+c^1_n x+c^2_n x^2+\dots+c^n_n x^n\right)^2 \Rightarrow c^0_n c^n_n+c^1_n c^{n-1}_n+\dots+c^n_n c^0_n$$

می‌دانیم $c^r_n=c^{n-r}_n \Rightarrow c^r_{2n}=\sum_{i=0}^{n}(c^i_n)^2$

حل روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولد:

مثال: تعداد جابجایی‌های حلقه‌ها در برج هانوی:

$$\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+1, & n\ge 1\\ a_0=0 \end{cases}$$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$\Rightarrow A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$\Rightarrow A(x)=2xA(x)+\frac{x}{1-x} \Rightarrow (1-2x)A(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1-2x}=\frac{a(1-2x)+b(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

$$\Rightarrow x=a(1-2x)+b(1-x) \Rightarrow a=-1,\ b=1$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n$$

$$\Rightarrow a_n=2^n-1$$

پایان فصل پنجم