بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِیمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ و تدوین : واحد فناوری انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل چهار : مجموعه های مرتب

1. رابطه R در A را ترتیب جزیی گوییم هر گاه بازتابی ضد متقارن و متعدی باشد مجموعه A را همراه ترتیب جزیی R مجموعه با **ترتیب جزیی** نامیده و ان را با (A,R) نمایش خواهیم داد.
2. اگر $(A,\leq)$ و $(B,\leq)$ دو مجموعه با ترتیب جزیی باشند در این صورت $(A\times B,\leq)$ نیز یک مجموعه با ترتیب جزیی است که در ان ترتیب جزیی به صورت زیر تعریف شده است:

$(a.b)\leq(a',b')$ اگر $a\leq a'$ در A و $b\leq b'$ در B باشد

ترتیب جزیی $\leq$ تعریف شده برای حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ را ترتیب جزیی **حاصل ضرب** میگویند.

اگر $(A.\leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزیی باشد گوییم که $a<b$ هر گاه $a\leq b$ ولی $a\neq b$ باشد. فرض کنید که $(A,\leq)$ و $(B,\leq)$ دو مجموعه با ترتیب جزیی باشد .یک ترکیب دیگر در $A\times B$ که با $\langle$ نمایش داده میشود به وسیله زیر تعریف میشود:

$(a.b)(a',b')$ اگر $a<a'$ یا $(b\leq b',a=a')$

این ترتیب را ترتیب **قاموسی** میگوییم . وقتی که A و B مجموعه های کاملا مرتب باشند در این صورت ترتیب قاموسی $\langle$ در $A\times B$ نیز یک ترتیب کامل است.

فرض کنید که Σ یک مجموعه متناهی از علائم باشد در این صورت یک رشته متناهی(شامل صفر عنصر) انتخاب شده از Σ را بدون نوشتن ویرگول بین عناصر نمایش داده و انرا یک کلمه روی Σ خواهیم گفت.Σ را الفبا مینامیم. طول کلمه w را با $|w|$ نمایش خواهیم داد.کلمه به طول صفر را با Λ نمایش داده و از ان به نام کلمه تهی یاد خواهیم کرد.مجموعه تمام کلمات به طول k به صورت Σ^k نمایش داده میشود این برین معناست که:

$$\Sigma^0=\{\Lambda\}$$
$$\Sigma^{k+1}=\{wa\mid w\in\Sigma\}k\geq 0$$

مجموعه کلمات با هر طولی روی Σ مجموعه $\Sigma^*=\bigcup_{k\geq 0}\Sigma^k$ خواهد بود.

همچنین مجموعه تمامی کلمات غیر تهی روی Σ مجموعه $\Sigma^+=\bigcup_{k\geq o}\Sigma^k$ است. بنابراین برای هر $w\in\Sigma^k$ داریم $|w|=k$. اگر $w,y\in\Sigma^*$ به طوری که $|w|=n$ و $|y|=m$، به عبارت دیگر $w=w_1w_2...w_n$ و $y=y_1y_2...y_m$ در این صورت الحاق دو کلمه را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$wy=w_1w_2...w_ny_1y_2...y_m$$

که کلمه ای به طول $n+m$:

$$|wy|=n+m$$

گراف سو دار یک ترتیب جزیی دارای هیچ دوری به طول بزرگتر از یک نیست.

نمودار هاس:

فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد میدانیم که گراف سو دار یک ترتیب جزیی در A دارای هیچ دوری به طول بیشتر از یک نیست . از طرف دیگر چون یک ترتیب جزیی یک رابطه بازتابی است هر راسی در گراف سو دار یک ترتیب جزیی شامل حلقه است برای سادگی کار همه حلقه ها را از گراف سو دار حذف میکنیم و همه یالهایی را که به وسیله یک رابطه متعدی به وجود امده اند نیز حذف میکنیم قرارداد میکنیم که جهت یالهای گراف سو دار یک ترتیب جزیی را به طرف بالا رسم میکنیم لذه میتوانیم جهت این یالها را حذف کنیم.بالاخره دوایر نمایش دهنده رئوس را نیز توسط نقاط نمایش خواهیم داد.

اگر $(A,\le)$ یک مجموعه جزیی و $(A,\ge)$ دوگان ان باشد در این صورت نمودار هاس $(A,\ge)$ وارون هاس $(A,\le)$ خواهد بود.

اگر $a\le b$ انگاه $a\langle_T B$.فرایند تشکیل یک ترتیب کامل مثل $\langle_T$ را ترتیب توپولوژیکی میگویند.(اگر $a\le b$ انگاه a باید قبل از b وارد شود.

فرض کنید که $(A,\le)$ و $(A',\le')$ دو مجموعه با ترتیب جزیی و $f:A\to A'$ یک تناظر یک به یک بین A,A' باشد.تابع f را یک تابع یکریفتی از $(A,\le)$ به $(A',\le')$ خواهیم گفت هر گاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم:

$a\le b$ اگر و تنها اگر $f(a)\le' f(b)$

اگر یک تابع یک ریفتی میان دو مجموعه با ترتیب جزئی $(A,\le)$ و $(A',\le')$ وجود داشته باشد در این صورت خواهیم گفت که $(A,\le)$ و $(A',\le')$ یکریفت هستند.

(اصل تناظر) اگر عناصر B نسبت به یکدیگر و یا نسبت به دیگر عناصر A دارای خاصیتی باشند و اگر این خاصیت را بتوان به طور کامل به وسیله $\le$ تعریف کرد در این صورت عناصر B' نیز باید دارای همان خاصیت تعریف شده به وسیله $\le'$ باشند.

- اگر f یک تابع یک ریفتی باشد و هر بر چسب a در H را به $f(b)$ تبدیل کنیم H به نمودار هاس $(A',\le')$ تبدیل میشود و بر عکس:
- هر گاه با جایگذاری هر بر چسب به وسیله $f(a)$, H به نمودار هاس $(A',\le')$ تبدیل شود f یک تابع یکریفتی خواهد بود.

عنصر $a\in A$ را یک عنصر ماگزیمال A خواهیم گفت اگر برای هیچ عضو $c\in A$ رابطه $a<c$ برقرار نباشد.

عضو $a\in A$ را یک عضو مینیمال A خواهیم خواند اگر برای هیچ عضو $a\in A$ رابطه $c<b$ برقرار نباشد.

مجموعه Z با ترتیب جزئی و متعارف $\le$ نه دارای عضو ماگزیمال است و نه عضو مینیمال.

فرض کنید که $(A,\leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی متناهی باشد در این صورت A دست کم دارای $(A,\leq)$ و $(A',\leq')$ و یک عضو مینیمال است.

عنصر $a\in A$ بزرگترین عضو A خوانده میشود هر گاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم : $x\leq a$. به همین ترتیب عضو $a\in A$ کوچکترین عضو A خوانده میشود هر گاه رابطه $a\leq x$ به ازای هر $x\in A$ برقرار باشد.

یک مجموعه با ترتیب جزئی حداکثر دارای یک بزرگترین عضو و یک کوچکترین عضو است.

بزرگترین عضو یک مجموعه با ترتیب جزئی را در صورت وجود با I نمایش میدهیم و اغلب انرا عضو واحد مینامیم. به طریق مشابه کوچکترین عضو یک مجموعه با ترتبب جزئی را در صورت وجود با O نمایش داده و انرا عضو صفر مینامیم.

مجموعه با ترتیب جزئی A و زیر مجموعه B از ان را در نظر بگیرید یک عضو $a\in A$ کرانه بالائی B خوانده میشود هر گاه به ازای همه $b\in B$ داشته باشیم $b\leq a$. به همین ترتیب عضو $a\in A$ کرانه پائینی B خوانده میشود هر گاه به ازای تمامی $b\in B$ داشته باشیم $a\leq b$.

فرض کنید A یک مجموعه با ترتیب جزئی و B زیر مجموعه ای از ان باشد عضو $a\in A$ را کوچکترین کرانه بالائی (LUB) برای B خواهیم گفت هر گاه اولا a یک کرانه بالائی برای B بوده و ثانیا اگر a' نیز یک کرانه بالائی برای B باشد انگاه $a\leq a'$ بنابراین $a=LUB(B)$ اگر با ازای هر $b\in B$, $b\leq a$ و اگر $a'\in A$ نیز یک کرانه بالائی برای B باشد($b\leq a'$ به ازای همه $b\in B$) انگاه $a\leq a'$.

به طریق مشابه یک عضو $a\in A$ را بزرگترین کرانه پائینی (GLB) برای B خواهیم گفت اگر a یک کرانه پایینی برای B باشد و اگر a' نیز یک کرانه پایینی برای B باشد انگاه $a'\leq a$. بنابراین $a=GLB(B)$ اگر به ازای هر $b\in B$, $a\leq b$. و اگر $a'\in A$ نیز یک کرانه پائینی برای B باشد (به ازای هر $b\in B$ و $a'\leq b$) انگاه $a'\leq a$.

طبق معمول کرانه های بالائی در $(A,\leq)$ متناظر با کرانه های پائینی در $(A,\geq)$ (برای هر مجموعه همسان از عناصر) و کرانه های پائینی در $(A,\leq)$ متناظر با کرانه های بالائی در $(A,\geq)$ هستند.

فرض کنید که $(A,\leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد . در این صورت یک زیر مجموعه B از A حد اکثر دارای یک LUB و یک GUB است.

فرض کنید که $(A,\leq)$ و $(A',\leq')$ مجموعه های با ترتیب جزئی یکریفت تحت تابع یکریفتی $f:A\to A'$ باشند .

(الف) اگر a یک عنصر ماگزیمال(مینیمال) $(A,\leq)$ باشد در این صورت $f(a)$ یک عنصر ماگزیمال(مینیمال) $(A',\leq')$ است.

(ب) اگر a بزرگترین(کوچکترین) عضو $(A,\leq)$ باشد در این صورت $f(a)$ بزرگترین(کوچکترین) عضو $(A',\leq')$ است.

(ج) اگر a یک کرانه بالائی برای (کرانه پائینی و LUB, GLB) برای زیر مجموعه B از A باشد در این صورت $f(a)$ نیز یک کرانه بالائی برای (کرانه پائینی و LUB, GLB) برای زیر مجموعه $f(B)$ از A' است.

(د) اگر هر زیر مجموعه از $(A,\leq)$ دارای یک $LUB(GLB)$ باشد در این صورت هر زیر مجموعه از $(A',\leq')$ نیز دارای یک $LUB(GLB)$ است.

یک **مشبکه** مجموعه ای با ترتیب جزیی مثل $(L,\leq)$ است که در ان هر زیر مجموعه شامل دو عنصر مثل $\{a,b\}$ دارای یک LUB و یک GUB باشد در این صورت $LUB(\{a,b\})$ را با $a\vee b$ نمایش داده و انرا وست b و a خواهیم گفت به طریق مشابه $GLB(\{a,b\})$ را با $a\wedge b$ نمایش داده و انرا رسنر b وa مینامیم.

اگر $(L_1,\leq)$ و $(L_2,\leq)$ دو مشبکه باشند در این صورت $(L,\leq)$ نیز یک مشبکه است که در ان $L=L_1\times L_2$ و ترتیب جزئی $\leq$ در L همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

فرض کنید که $(L,\leq)$ یک مشبکه باشد زیر مجموعه نا تهی S از L را زیر مشبکه برای L میگوئیم هرگاه به ازای هر $a,b\in S$ عناصر $a\vee b$ و $a\wedge b$ (که در L تعئین میشوند) در مجموعه S نیز قرار داشته باشند.

مشبکه های یکریفت: فرض کنید $f:L_1\to L_2$ یک تابع یکریفتی از $(L_1,\leq_1)$ به $(L_2,\leq_2)$ باشد در این صورت L_1 اگر و تنها اگر L_2 یک مشبکه باشد. در حقیقت اگر a و b عناصر L_1 باشند انگاه $f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$ و $f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)$. اگر دو مشبکه یکریفت باشند انها را مشبکه های یکریفت مینامیم.

خواص مشبکه ها :

1. $a \le a \vee b$ و $b \le a \vee b$ ($a \vee b$ یک کرانه بالائی برای a و b است)
2. اگر $a \le c$ و $b \le c$ انگاه $a \vee b \le c$ ($a \vee b$ کوچکترین کرانه بالائی برای a و b است).
3. $a \wedge b \le a$ و $a \wedge b \le b$ ($a \wedge b$ یک کرانه پائینی برای a و b است).
4. اگر $c \le a$ و $c \le b$ انگاه $c \le a \wedge b$ ($a \wedge b$ بزرگترین کرانه پائینی برای a و b است).

اگر L یک مشبکه باشد انگاه به ازای هر a و b از L داریم:

الف) $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \le b$

ب) $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \le b$

ج) $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \vee b = b$

فرض کنید L یک مشبکه باشد انگاه داریم:

1. خاصیت خود توانی

الف) $a \vee a = a$ ب) $a \wedge a = a$

2. خاصیت جابجائی

الف) $b \vee a = a \vee b$ ب) $b \wedge a = a \wedge b$

3. خاصیت شرکت پزیری

الف) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ب) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

4. خاصیت جزبی

الف) $a \vee (a \wedge b) = a$ ب) $a \wedge (a \vee b) = a$

فرض کنید که L یک مشبکه باشد انگاه برای هر a,b,c از L چنین داریم:

1. اگر $a \le b$ انگاه

الف) $a \vee b \le b \vee c$

ب) $a \wedge b \le b \wedge c$

2. $a \le c$ و $b \le c$ اگر و تنها اگر $a \vee b \le c$
3. $c \le a$ و $c \le b$ اگر و تنها اگر $c \le a \wedge b$
4. اگر $a \le b$ و $c \le d$ انگاه

الف) $a \vee c \le b \vee d$

ب) $a \wedge c \le b \wedge d$

مشبکه های ویژه :

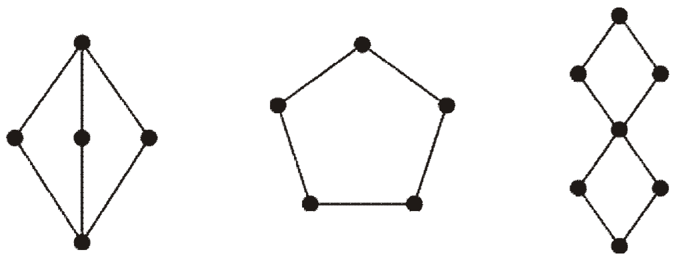
- مشبکه L را محدود گوئیم هر گاه دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد
- فرض کنید که $L = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ یک مشبکه متناهی باشد در این صورت L محدود است
- مشبکه L را پخشپذیر گوئیم هر گاه به ازای هر a,b,c از L روابط زیر بر قرار باشد:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{(الف)}$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \text{(ب)}$$

اگر L پخش پذیر نباشد ان را **پخش ناپزیر** مینامیم.

مشبکه L پخش ناپزیر است اگر و تنها اگر شامل زیر مشبکهای یکریخت با یکی از مشبکه های اشکال زیر باشد.



ب الف

فرض کنید که L یک مشبکه محدود دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد.همچنین فرض کنید که $a \in L$. عنصر $a' \in L$ را متمم a گوئیم هر گاه $a \wedge a' = O$ و $a \vee a' = I$. از این تعریف مشاهده میشود که $I' = O$ و $O' = I$.

فرض کنید که L یک مشبکه محدود و پخش پزیر باشد اگر یک متمم برای عضوی وجود داشته باشد در این صورت این متمم منحصر به فرد است.

مشبکه $(L, \leq)$ را متمم دار گوئیم هر گاه محدود بوده و هر عضو ان متمم داشته باشد.

جبر بول :

قبلا دیدیم که اگر S یک مجموعه دلخواه و $L = P(S)$ باشد انگاه $(L, \subseteq)$ یک مشبکه است این مشبکه دارای ویژگی های متنوعی است که یک مشبکه در حالت عمومی فاقد انهاست.به همین دلیل این نوع مشبکه ها برای کارکردن بسیار ساده بوده و نقش مهمی را در کاربردهای مختلف ایفا میکنند.

اگر $S_1=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ و $S_2=\{y_1,y_2...,y_n\}$ دو مجموعه دلخواه و متناهی با n عنصر باشند در این صورت مشبکه های $(P(S_1),\subseteq)$ و $(P(S_2),\subseteq)$ یکریخت هستند.

نکته : برای هر n=0,1,2,… فقط یک نوع مشبکه به صورت $(P(S),\subseteq)$ وجود دارد این مشبکه مستقل از عناصر S بوده و فقط به مقدار n بستگی دارد، تعداد عناصر این مشبکه برابر 2^n است.

یک مشبکه متناهی را جبر بول گوئیم هرگاه به ازای یک عدد صحیح و مثبت n یکریخت با B_n باشد.

قاعده جایگزینی برای جبر بول

فرض کنید که $(L,\leq)$ یک جبر بول z,y,x سه عضو دلخواه از ان و I وO نیز به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عضو ان باشد. نیز فرض کنید A , B, C سه زیر مجموعه دلخواه از مجموعه S و به عبارتی دیگر سه عضو از $(P(S),\subseteq)$ باشند در این صورت هر ویژگی برای عناصر دلخواه از $(P(S),\subseteq)$ را میتوان با جایگزین کردن $\vee$ به جای $\cup$ و $\wedge$ به جای $\cap$ و $\leq$ به جای $\subseteq$ عینا به همان ویژگی برای عناصر دلخواه از $(L,\leq)$ منتقل کرد.

جدول صفحه ی 158 کتاب درسی مطالعه شود

برای هر عدد صحیح $n\geq 1$ ، B_n مساوی با n بار حاصل ضرب B در خودش است که در ان ترتیب جزئی در $B\times B\times ...\times B$ (n بار) همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

توابع و چند جمله ای های بولی:

(تابع بولی) تابع $f:B_n\rightarrow B$ را که دامنه ان B_n و برد ان مجموعه $B=\{0,1\}$ است تابع بولی مینامیم.

(چند جمله ای های (عبارات) بولی)فرض کنید که $\{x_1x_2,...,x_n\}$ مجموعه ای از n متغیر بولی باشد یک چند جمله ای بولی $P(x_1,x_2,...,x_n)$ روی متغیر n بولی $x_1,x_2,...,x_n$ به صورت بازگشتی زیر تعریف میشود :

1. $x_1,x_2,...,x_n$ چند جمله ای های بولی هستند.
2. نمادهای 0 و 1 چند جمله ای های بولی هستند.
3. اگر $P(x_1,x_2,...,x_n)$ و $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ دو چند جمله ای بولی باشند در این صورت عبارات $(P(x_1,x_2,...,x_n)\vee Q(x_1,x_2,...,x_n))$ و $(P(x_1,x_2,...,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,...,x_n))$ نیز چند جمله ای های بولی هستند.

4.اگر $P(x_1,x_2,...,x_n)$ یک چند جمله ای بولی است انگاه $(P(x_1,x_2,...,x_n))'$ نیز یک چند جمله ای بولی است.

5.هیچ چند جمله ای بولی دیگری روی متغیرهای بولی $x_1,x_2,...,x_n$ غیر از چند جمله ای های حاصل از اعمال چهارگانه فوق وجود ندارد.

اگر $f:B_n \to B$ انگاه $S(f)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$S(f)=\{b\in B_n \mid f(b)=1\}$$

از قضیه بالا نتیجه زیر را میگیریم:

فرض کنید که f, f_1, f_2 سه تابع بولی از B_n به B باشند در این صورت

الف)اگر $S(f)=S(f_1)\cup S(f_2)$ انگاه به ازای همه $b\in B_n$, $f(b)=f_1(b)\vee f_2(b)$.

ب)اگر $S(f)=S(f_1)\cap S(f_2)$ انگاه به ازای همه $b\in B_n$, $f(b)=f_1(b)\wedge f_2(b)$

نکته : هر تابع $f:B_n \to B$ را میتوان به وسیله یک عبارت بولی تولید کرد.

تعاریف:

لیترال : یک لیترال یک متغیر بولی و یا متمم ان است.

کمینه : یک جمله کمینه روی n متغیر بولی $x_1,x_2,...,x_n$ عبارت بولی $\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge...\wedge\bar{x}_n$ است که در ان هر لیترال $\bar{x}_i$, $1\le i\le n$ یا برابر متغیر بولی x_i و یا برابر متمم ان یعنی x_i' است.

یک عبارت بولی روی n متغیر بولی $x_1,x_2,...,x_n$ را یک شکل نرمال فصلی یا به طور اختصار dnf گوئیم هرگاه به صورت وست هائی از جملات کمینه روی n متغیر بولی مزبور بیان شده باشد.

بیان یک عبارت بولی به صورت یک dnf با استفاده از خواص جبر بول :

در فرایند ساده کردن مدارها قوانین دمورگان و بخشپزیری بسیار مفید هستند

مثال:عبارت بولی $x\wedge(y\vee z')$ را به صورت یک dnf بیان کنید.

با استفاده از قانون پخشپزیری نتیجه میشود $(x\wedge y\vee(x\wedge z'))$

با توجه به اینکه $w\wedge I = w$ و $w\vee w' = I$ لذا

$$[(x\wedge y)\wedge(z\vee z')]\vee[(x\wedge z')\wedge(y\vee y')] =$$
$$[(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')]\vee[(x\wedge z'\wedge y)\vee(x\wedge z'\wedge y')] =$$
$$(x\wedge y\wedge)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge z'\wedge y)\vee(x\wedge y'\wedge z')$$

و با توجه به قانون خود توانی داریم $(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')$

دو عبارت بولی را هم ارز میگوئیم اگر هر دو نمایش دهنده تابع بولی یکسان باشند بنابراین دو عبارت بولی هم ارز هستند اگر و تنها اگر دارای یک dnf باشند.

نقشه کارنو

الف) بررسی حالت $n = 2$

دراین حالت، f یک تابع بولی از دو متغیر ، مثل x و y است. شکل زیر ماتریس 2×2 را نشان می دهد که هرکدام از خانه های آن حاوی یک عنصر b از B_2 است. در شکل، هرکدام از این b ها را با جمله ی کمینه متناظر جایگزین کرده ایم. برچسب خانه ها در این شکل صرفا به خاطر ارجاع بوده و از این به بعد از نوشتن آنها خودداری می کنیم.اما فرض بر این است که خواننده بتواند جای آنها را به خاطر بسپارد. در شکل مشاهده می شود که متغیر x' در هر دو خانه ی سطر اول ظاهر شده است. به طریق مشابه متغیر x در خانه های سطر دوم ظاهر شده است. با توجه به این مطالب این دو سطر را به ترتیب با x' و x برچسب زده ایم. همین طور برای دو ستون بر حسب y .

00	01
10	11

الف

	y'	y
x'	$x'\wedge y'$	$x'\wedge y$
x	$x\wedge y'$	$x\wedge y$

ب

نکته : وقتی مقادیر تابع بولی $f : B_2 \to B$ دقیقا یک سطر و یا یک ستون را پر کرده باشند، در این صورت برچسب آن سطر و یا ستون هم ارز با تابع بولی f خواهد بود.البته اگر مقدار یک تابع f فقط یک خانه از ماتریس را پر کند، در این صورت f به وسیله ی جمله ی کمینه ی متناظر تولید می شود.
می توان نشان داد که هر چه نواحی شامل مقدار یک برای تابع f بزرگتر باشد ، به همان اندازه عبارت بولی متناظر با f کوچکتر خواهد بود.

ب) حالت $n = 3$

در این حالت تابع بولی f از B_3 به B تعریف شده است. بنابر این فرض کنید که f تابعی از متغیرهای بولی x ، y ، z است. نقشه کارنو در این حالت به وسیله ی یک ماتریس 2×4 نمایش داده می شود. جدولهای زیر به ترتیب الف و ب عنصر B_3 و جملات کمینه متناظر با آنها را در داخل خانه های ماتریس نشان می دهند.

	y'	y'	y	y
x'	x'∧y'∧z'	x'∧y'∧z	x'∧y∧z	x'∧y∧z'
x	x∧y'∧z'	x∧y'∧z	x∧y∧z	x∧y∧z'
	z'	z	z	z'

ب

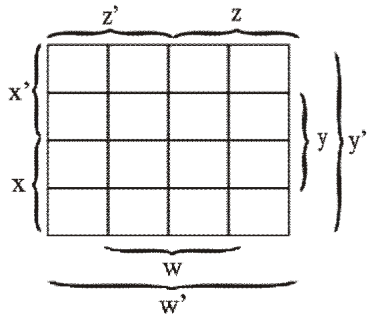
	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

الف

نکته : مقادیر یک تابع بولی $f : B_3 \to B$ را می توانیم به صورت اجتماعی از نواحی مستطیل شکل بنویسیم.

ج) حالت $n = 4$

در اینجا ،توابع بولی از B_4 به B تعریف شده اند که شامل 4 متغیر مثل x، y ، z و w هستند.
در جدول زیر توزیع ورودی ها و برچسب مستطیل های متناظر، برای چنین توابعی نشان داده شده است.
در این حالت فرض بر این است که ستون اول و آخر و هم چنین سطر اول و آخر مجاور هم هستند. در این حالت نیز به جستجوی مستطیلهایی به ابعاد توانی از دو خواهیم بود(1،2،4).



ب

	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

الف