بِسْمِ اللّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ : واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل اول : حساب گزاره ها

تعریف : در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را **فرض** یا **مقدم** و عبارت آخر را **نتیجه** یا **تالی** مینامیم.

- یک استدلال زمانی **معتبر** است که اگر فرضهای آن **درست** باشد نتیجه نیز **درست** است.

- جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمیتوانند هم راست باشند هم دروغ. چنین جملاتی را **گزاره** می نامیم.

قاعده ی طرد شق ثالث :گزاره ای که دروغ نیست پس راست است و بر عکس.

گزاره : یک جمله ی خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هردو.

قضیه :گزاره ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان ثابت کرد.

تشکیل گزاره های جدید از روی گزاره های قبلی (حروف پیوندی مبنا) :

- **حرف پیوندی ((و))،((عطف))،((∧))** : زمانی راست است که هر دو راست باشد.
- **حرف پیوندی ((یا))،((فصل))،((∨))** : زمانی راست است که یکی از گزاره ها راست باشد.
- **نقیض ((~)) یا نفی یک گزاره ها** : ارزش گزاره ی اول را نفی میکند.
- **جدول درستی** : روشی برای تجزیه و تحلیل ارزشهای گزاره ها

نکته : **در نوشتن جدول درستی اگر n گزاره ی مبنا داشته باشیم** 2^n **ترکیب داریم.**

مراحل ارزیابی جدول:

1. داخلی ترین پرانتز
2. عمل ~
3. عمل ∧ و ∨

گزاره ی راستگو : ارزش درستی گزاره های مبنای تشکیل دهنده آن همواره راست باشد.

نکته: دو گزاره را به طور منطقی هم ارز گوییم اگر به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره های مبنای تشکیل دهنده آنها مقادیر درستی یکسانی داشته باشند. (با گزاره های هم ارز میتوان گزاره های پیچیده را با گزاره های ساده جایگزین کرد)

$p \equiv q$

گزاره ی شرطی (p à q) :گزاره p را مقدم و q را تالی مینامیم و این گزاره زمانی نادرست است که مقدم درست ولی تالی نادرست باشد.

قضیه : $p \text{ à } q \equiv \sim q \vee q \equiv \sim q \text{ à } \sim p \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

تعاریف شرطی :

- اگر p آنگاه q
- q اگر p
- p تنها اگر q
- P شرط کافی برای q است
- q شرط لازم برای p است

تعریف : اگر $p \text{ à } q$ گزاره ی شرطی باشد ، گزاره ی $\sim p \text{ à } \sim q$ را عکس نقیض، $q \text{ à } p$ را عکس و $\sim p \text{ à } \sim q$ را وارون آن گزاره میگوییم.

خواص گزاره ها :

جابجایی : $q \vee p \equiv p \vee q \quad , \quad q \wedge p \equiv p \wedge q$

شرکت پزیری : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

قانون دمورگان : $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q) \quad , \quad \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

خود توانی : $p \equiv p \vee p \quad , \quad p \equiv p \wedge p$

پخش پزیری :

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r) \quad , \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

همانی : $T \equiv p \vee T \quad , \quad p \equiv p \vee F \quad , \quad p \equiv p \wedge T \quad , \quad F \equiv p \wedge F$

متمم : $T \equiv p \vee \sim p \quad , \quad F \equiv p \wedge \sim p$

نقیض دوگانه : $\sim\sim p \equiv p$

جزبی : $p \equiv p \vee (p \wedge q)$, $p \equiv p \wedge (p \vee q)$

گزاره ی دوشرطی $(p\ \text{ß à}\ q)$: *اگر ارزش دو گزاره ی تشکیل دهنده ی آن یکسان باشند آنگاه ارزش آن راست است و به این صورت بیان میشود : p اگر و تنها اگر q*

$p\ \text{ß à}\ q \equiv (p\ \text{à}\ q) \wedge (q\ \text{à}\ p)$

$\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$

روشهای اثبات :

q از $p_1 , p_2 , \ldots , p_n$ نتیجه میشود à یک راستگو باشد $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)\ \text{à}\ q$

نماد $\vdash$ (بنابراین) :

$\mathbf{p_1 , p_2 , p_3 , \ldots , p_n \vdash q}$

- در گزاره ی فوق p_i مقدم ها و مفروضات گزاره و q نتیجه می باشد.
- مجموعه ی فوق در کل یک **استنتاج** می باشد.

چند قاعده ی مهم استنتاج :

قیاس فصلی $p \vdash p \vee q$

قیاس تفصیمی $p \wedge q \vdash p$

قیاس عطفی $p , q \vdash p \wedge q$

قیاس استنتاجی $p ,\ p\ \text{à}\ q \vdash q$

قیاس تعدی $p\ \text{à}\ q ,\ q\ \text{à}\ r \vdash p\ \text{à}\ r$

قیاس عکس $p\ \text{à}\ q , \sim q \vdash \sim p$

استدلال غلط : استدلالی است که برای بعضی حالات مقدم های آن راست ولی تالی دروغ باشد

اثبات غیر مستقیم :

یک استلزام منطقی با عکس نقیض آن هم ارز است : p à q ≡ ~q à ~p

زیرا که گزاره ی روبرو یک راستگو است (p à q) ß à (~q à ~p)

در این اثبات به جای آن که ثابت کنیم به طور مستقیم p à q درست است، فرض می کنیم که q دروغ است و نشان می دهیم که در صورت اخیر p نیز دروغ است.

اثبات به وسیله ی برهان خلف :

این روش بر پایه ی راستگوی [(p à q) $\wedge$ ~q] à ~p

و یا قیاس p à q , ~q $\vdash$ ~p

بنا شده است.

بدین معنی که اگر گزاره ی p به گزاره ی دروغ q منجر شود آنگاه خود p باید دروغ باشد.

تناقض : گزاره ای که ارزش آن صرف نظر از مقادیر متغیرهای ظاهر شده در آن **همواره دروغ** است.

نکته : هر گزاره ای که به یک تناقض منجر شود باید دروغ باشد.

نکته : اگر همه ی p_i ها راست و ~q دروغ باشد در نتیجه q راست است. (**برهان خلف**)

گزاره نما : عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته درآن مشخص شود به گزاره تبدیل شود.

- گزاره نمایی که تنها شامل یک متغیر باشد **1-مکانی**، شامل دو متغیر باشد **2-مکانی** و اگر شامل n متغیر باشد **n-مکانی** نامیده میشود .
- مجموعه مقادیری که میتواند جایگزین یک متغیر موجود در گزاره نما شود **جهان** نامیده می شود.
- یک گزاره نمای n-مکانی را **ارضا شدنی** می گوییم هرگاه یک n تایی موجود باشد که آن را ارضا کند
- اگر تمامی n تایی ها موجب ارضای آن شوند گزاره نمای مزبور را **معتبر** خواهیم گفت.
- دو گزاره نما را **هم ارز** می گوییم هرگاه به ازای کلیه ی مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسان داشته باشند. $X_{(x)}$ ß à $Y_{(x)}$ هم ارز معتبر است

سورها

سور جهانی (عمومی) : به مقادیر ویژه ای از a و b بستگی ندارد، بلکه وابسته به این است که عبارت مزبور به ازای همه ی مقادیر a و b راست است.

گزاره نما به ازای هر مقداری که به متغیر a منسوب شود راست است : $\forall a\ R_{(a)}$

سور وجودی : متغیری در یک گزاره نما که می توان با انتقاب مقدار مناسبی برای متغیر یاد شده به یک گزاره ی راست تبدیل کرد. $\exists a\ R_{(a)}$

$\forall x\ P(x)$ تمامی مقادیر از جهان متغیر x گزاره نمای p را ارضا می کند. (جهانی)

$\exists x\ P(x)$ دست کم یک مقدار از جهان متغیر x وجود دارد که p را ارضا کند. (وجودی)

نقیض گزاره های سوردار :

- سورهای وجودی ⟵ ترکیب فصلی $\exists x \sim p(x) \equiv \sim[\ \forall x\ P(x)\ ]$
- سورهای عمومی ⟵ ترکیب عطفی $\forall x \sim p(x) \equiv \sim[\exists\ x\ P(x)\ ]$

منطق گزاره ای : حالت خاصی از منطق گزاره نماهاست که در آن هیچ کدام از گزاره ها شامل سور و متغیر نیست.

چهار قاعده ی مهم استنتاج :

تعمیم وجودی $P(a)\ \vdash \exists X\ P(x)$

تعمیم جهانی $P(a)\ \vdash \forall X\ P(x)$

- a یک عضو دلخواه از جهان مورد بحث است.

وجود لحظه ای $\exists X\ P(x)\ \vdash\ P(a)$

- a عضو ویژه از یک جهان متغیر x به گونه ای که P را ارضا کند

$\forall\ X\ P(x)\ \vdash\ P(a)$

جهان لحظه ای

- a هر عضوی از جهان متغیر x می تواند باشد.

اعمال سورها بر روی ترکیب های عطفی و فصلی در گزاره نماها

$$\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x) \equiv \forall x\ [P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv \exists x\ [P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x) \vdash \forall x\ [P(x) \vee Q(x)]$$
هم ارز نیستند

$$\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)] \vdash \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$$
هم ارز نیستند

$$\forall x\ [P(x) \vee Q] \equiv \forall x\ [P(x) \wedge Q]$$
Q گزاره ای است که شامل متغیر x نیست

استقرای ریاضی

اصل استقرای ریاضی قاعده ی استنتاجی را در اختیار ما قرار می دهد

$$P(1)\ ,\ \forall x\ [P(k) \rightarrow P(k+1)]\ \vdash \forall n\ P(n)$$

1. **P(1)** راست است
2. $\forall k \geq 1$, P(k) و P(k+1) را نتیجه می دهد
3. P(n) راست و $\forall k \geq n$ و P(k) نتیجه می دهد P(k+1) را .

- **مبنای استقرا** : نشان می دهیم $P(n)$ راست است
- **فرض استقرا** : فرض کنیم برای هر $k \geq n$ ، $P(k)$ راست است
- **مرحله استقرا** : با استفاده از فرض نشان دهیم $P(k+1)$ راست است

بازگشت : روش تعیین یک تابع می باشد ، یک مجموعه و یا یک الگوریتم را که تابعی از خودش باشد بازگشت گوییم.

تابع بازگشتی فاکتوریل : $f(0) = 1 \;,\; \forall n \geq 0 \;,\; f(n+1) = (n+1)\, f(n) \;,\; f(n)=n!$

تابع تصاعد حسابی : $A(0) = a \;,\; \forall n \geq 0 \;,\; A(n+1) = A(n) + d \;,\; A(n)= a + nd$

فیبوناچی : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \;,\; \forall n \geq 1 \;,\; F_1 = 1 \;,\; F_0 = 0$

استقرای ریاضی قوی : فرض کنید $P(n)$ عبارتی باشد که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n مقدار آن یا راست و یا دروغ باشد به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $P(n)$ راست است. هر گاه عدد صحیح مثل $q \geq 1$ موجود باشد به گونه ای که : $P(1)$ و $P(2)$ و … و $P(q)$ همه راست باشند ، برای هر $k \geq q$ با فرض راست بودن $P(i)$ و $k \geq i \geq 1$ بتوان راست بودن $p(k+1)$ را نتیجه گرفت.

روش اثبات:

1. **مبنای استقرا** : $p(1)$ و $P(2)$ و … و $P(q)$ همه راست باشند.
2. **فرض استقرا** : فرض اینکه $P(i)$ و $k \geq i \geq 1$ راست هستند که در آن $k \geq q$
3. **مرحله استقرا** : نشان دادن اینکه $P(k+1)$ راست است.

پایان فصل اول