بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِیمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای

گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ : واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل هفتم : درخت ها

درخت ها حالت خاصی از گراف ها هستند. اگر $G(V,E)$ گرافی بی سو و بی حلقه باشد، G را درخت گوییم اگر همبند بوده و دارای هیچ دوری نباشد. اگر G_i همبند نباشد اما هر کدام از مؤلفه های آن یک درخت باشد آن را جنگل می گوییم. اگر G یک درخت باشد با T نمایش داده می شود.

قضیه : اگر a و b دو راس از یک درخت با $|V|>1$ باشد آنگاه حداقل یک راس در V وجود دارد که درجه ی آن مساوی یک است.

قضیه : اگر $T(V,E)$ یک درخت باشد در این صورت داریم $|E|=|V|-1$

لم : اگر $T(V,E)$ یک درخت با $|V|>2$ باشد آنگاه دست کم دو راس از درجه یک دارد.

اثبات :

$$\text{فرض}\quad |V|=n \rightarrow \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2|E|=2(n-1)=2n-2$$

$$\text{تنها یک راس از درجه 1 داریم} \rightarrow \deg(v_i)\geq 2 \ , \ i=2,\dots,n$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=1+\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)\geq 1+2n-2=2n-1 \rightarrow -2\geq -1 \quad \text{تناقض}$$

قضیه : اگر دو راس غیر مجاور درخت T را با هم جمع کنیم در گراف حاصل یک دور ایجاد می شود.

قضیه :گراف $G(V,E)$ یک دخت است اگر و تنها اگر دارای دوری نباشد و $|E|=|V|-1$

اثبات : نیمی از قضیه که توسط استقرا ثابت می شود. حال می خواهیم نشان دهیم اگر گراف G دارای دور نبوده و $|E|=|V|-1$ آنگاه G همبند است.

اگر $G_1,\dots,G_k$ مولفه های همبند باشند و $G_i(V_i,E_i)$ هرکدام از مولفه ها یک درخت است زیرا همبند است و دور ندارد و از آنجا که $k=1$ است پس فقط یک مولفه ی همبند داریم.

$$|E_i|=|V_i|-1\ ,\ |E|=\sum_{i=1}^{k}|E_i|=|V|-k$$

قضیه : عبارات زیر در مورد گراف بی سو و بی حلقه ی $G(V,E)$ هم ارزند :

الف) G یک درخت است.

ب) G همبند است و $|E|=|V|-1$.

ج) G شامل هیچ دوری نیست و $|E|=|V|-1$.

د) G همبند است ولی حذف هر یال آن را به دو درخت تقسیم می کند.

ه) G شامل هیچ دوری نیست ولی اگر دو راس غیر مجاور آن را به هم وصل کنیم دقیقا یک دور خواهد داشت.

درخت ریشه دار :

- گراف سودار $G(V,E)$ یک درخت سودار است هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت یال ها درخت باشد.
- درخت سودار $T(V,E)$ را ریشه دار گوییم هرگاه راس منحصر به فرد r موجود باشد به طوری که $\deg^{-}(v)=0$ و برای هر راس $\deg^{-}(v)=1$.
- در یک درخت ریشه دار راسی مانند v که $\deg^{+}(v)=0$ است برگ یا راس خارجی (گره خارجی) نامیده می شود و باقی رئوس راس داخلی (گره داخلی) یا شاخه نامیده می شوند.
- اگر طول مسیر از ریشه به راسی x باشد می گوییم آن راس در تراز x واقع شده است.
- برای یال (n,s) که جهت از n به s است n پدر و s فرزند نامیده می شوند.
- هرگاه از a به b مسیری موجود باشد a را نیای b گوییم و b را نواده ی a.
- رئوسی که پدر مشترک داشته باشند برادر یا خواهر نامیده می شوند.
- اگر راس v_1 یک راس از درخت باشد آنگاه زیر درخت به ریشه ی v_1 مساوی زیر گراف القا شده به وسیله ی v_1 و همه ی نواده های آن در صورت وجود است.
- درخت ریشه دار مرتب شده :

1) ریشه را با صفر برچسب می زنیم.

2) رئوس تراز یک را از چپ به راست با 1 و 2 و 3 و ... برچسب می زنیم.

3) اگر v راس داخلی با تراز بزرگتر مساوی یک باشد و با a برچسب بخورد به فرزندانش برچسب $a.1, a.2, \ldots$ زده می شود.

- این روش به سیستم نشانی عمومی معروف است و هر راس که به صورت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ برچسب خورده باشد در تراز n است.
- اگر u و v دو راس با نشانی $b=a_1,\ldots,a_m$ و $c=a_1,\ldots,a_n$ باشد گوییم $b<c$ اگر

الف) $m<n$ ب) $a_m<a_n$

- یک درخت ریشه دار را یک درخت ریشه دار دودویی گوییم هرگاه به ازای هر راس v درجه ی خروجی آن صفر، یک، یا دو باشد.
- در کامپیوتر درخت های دودویی که به ازای هر r , $\deg^{+}(v)=0$ یا $\deg^{+}(v)=2$ است برای نمایش عملیات دودویی استفاده می شوند.
- نماد (prefin) پیشوندی به افتخار ابداع کننده ی آن نماد لهستانی گفته می شود و مزیت آن این است که علارغم به کار نرفتن پرانتز هیچگونه ابهامی ندارد. اگر درخت را از بالا به پایین و از

چپ به راست بخوانیم این نماد به دست می آید و نماد میانوند (infin) $a\,\mathrm{o}\,b$ به صورت $\mathrm{o}ab$ خواهد بود.

- ترتیب در درخت ها اهمیت زیادی دارد. چند روش سیستماتیک برای مرتب سازی درخت داریم از جمله : مرتب سازی پیش ترتیب (preorder) و مرتب سازی پس ترتیب (postorder) که به صورت بازگشتی زیر تعریف می شوند :

اگر T درختی با ریشه ی r باشد و فقط همین ریشه را داشته باشد خود ریشه پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب را تشکیل می دهد و اگر $|V|>1$ با فرض $T_1,\ldots,T_k$ زیر درخت های T از چپ به راست داریم :

الف) پیمایش پیش ترتیب، نخست ریشه r سپس رئوس T_1 را به صورت پیش ترتیب آنگاه T_2 الی T_k را به همین ترتیب ملاقات می کند.

ب) پیمایش پس ترتیب، نخست رئوس $T_1,\ldots,T_k$ را به ترتیب به صورت پس ترتیب و سپس ریشه را ملاقات می کند.

اگر درخت ریشه دار دودویی باشد پیمایش میان ترتیب هم به صورت بازگشتی تعریف می شود :

اگر $|V|=1$ ریشه به تنهایی یک پیمایش میان ترتیب خواهد بود و اگر $|V|>1$ و T_L,T_R زیردرخت های چپ و راست باشند، نخست T_L به صورت میان ترتیب سپس ریشه و سپس T_R به صورت میان ترتیب پیمایش می شود.

نکته : 1) زیر درخت چپ یا راست می تواند تهی باشد

2) اگر $\deg^{+}(v)=1$ و w فرزند باشد باید بین فرزند چپ و راست تمایز قائل شد.

درخت های پوشا :

زیرگراف H از گراف $G(V,E)$ را یک درخت پوشا برای G میگوییم هرگاه

الف) H یک درخت باشد.

ب) همه ی رئوس V را شامل شود.

نکته : درخت پوشایی که سودار باشد درخت پوشای سودار نامیده می شود.

* اگر گراف G همبند باشد تعداد یال هایی که باید برای بدست آوردن درخت پوشا از G حذف کرد برابر $|E|-|V|+1$ است. این عدد را رتبه ی مداری G می گوییم. (یال هایی که حذف می شوند از هر دور گراف انتقاب می شوند)

قضیه : گراف بی سوی $G(V,E)$ همبند است اگر و تنها اگر شامل درخت پوشا باشد. (این الگوریتم کارا نیست چون زمان پیدا کردن دورها بسیار زیاد است)

دو الگوریتم کارا برای پیدا کردن یک درخت پوشا برای یک گراف همبند الگوریتم های جستجو نخست در سطح (BFS) و جستجو نخست در عمق (DFS) می باشند.

در BFS رئوس واقع در یک تراز پیش از رفتن به تراز بعدی ملاقات می شوند و در DFS ابتدا رئوس با ترازهای بیشتر پردازش می شوند.

الگوریتم DFS :

ورودی : گراف بی سو و همبند $G(V,E)$ که رئوس آن به ترتیب $v_1,v_2,\ldots,v_n$ اولویت بندی شده اند.

خروجی : درخت پوشای ریشه دار و سودار $T=(V1,E1)$.

1) $V1 \leftarrow \{v_1\}, v \leftarrow v_1$. v_1 ریشه ی درخت T خواهد بود. v_1 ملاقات شد. $E1=f$

2) $2 \le I \le n$ کوچکترین اندیسی است که $\{v,v_i\}\in E$ و راس v_i قبلا ملاقات نشده است. اگر این اندیس وجود نداشت به مرحله ی 3 برو، در غیر این صورت :

الف) $E1=E1\cup\{v,v_i\}$, $V1=V1\cup v_i$ ، v_i ملاقات شد.

ب) $v \leftarrow v_i$

ج) برو به مرحله ی 2.

3) اگر $V=V1$ درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می یابد.

4) اگر $\bar{V}\neq V1$ ، اگر u پدر v در درخت V باشد $v\leftarrow u$ و برو به مرحله 2.

الگوریتم BFS :

ورودی : گراف بی سوی همبند $G(V,E)$ که رئوس آن به ترتیب $v_1,\ldots,v_n$ اولویت بندی شده اند.

خروجی : درخت پوشای ریشه دار و سودار $T=(V1,E1)$.

1) v را درج . $V1=v_1$, $E1=f$, v_1 ملاقات شد.

2) اگر صف خالی است T درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می یابد، در غیر این صورت راس v را از سر صف بردار، برای راس v راس $2\le i\le n, v_i$ را بررسی کن. اگر v_i ملاقات نشده است و $\{v,v_i\}\in E$ در این صورت:

الف) $V1=V1\cup\{v_i\}$, $E1=E1\cup\{v,v_i\}$

ب) راس v_i ملاقات شده و در آخر صف Q درج می شود.

ج) برو به مرحله 2.

درخت های پوشای مینیمم :

در گراف های وزن دار درخت پوشای مینیمم درخت پوشايی است که $\sum_{i=1}^{m} C_i$ در آن مینیمم است.

برای یافتن این درخت ها دو الگوریتم کراسکال و پریم موجود است.

الگوریتم کراسکال :

ورودی : گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V,E)$ که در آن برای هر $C \in E$ یک عدد حقیقی $C(e) > 0$ منسوب شده است.

خروجی : درخت پوشای T با هزینه ی مینیمم.

1) $i = 1$ فرض $C_i \in E$ یالی (غیر از حلقه) از G با $C(e)$ مینیمم.

2) برای $1 \le i \le n-2$ اگر یال های $e_1,...,e_i$ قبلا انتخاب شده اند از میان بقیه یال ها e_{i+1} را به گونه ای انتخاب می کنیم که :

الف) $C_{(i+1)}$ مینیمم باشد

ب) زیر گراف تشکیل شده هیچ دوری ندهد.

3) $i \leftarrow i+1$ ، اگر $i = n-1$ زیرگراف حاصل همبند ، دارای n راس و $n-1$ یال بوده و درخت پوشای مینیمم است پس الگوریتم خاتمه می یابد.

اگر $i < n-1$ برو به 2.

قضیه : فرض کنید $G(V,E,C)$ یک گراف همبند بی سو است اگر T درخت تولید شده با الگوریتم کراسکال باشد T یک درخت پوشای مینیمم است.

الگوریتم پریم :

ورودی : گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V,E)$ که در آن برای هر $e \in E$ یک عدد حقیقی $C_{(e)} > 0$ منسوب شده است.

خروجی : درخت پوشای T با هزینه مینیمم.

1) $P \leftarrow \{v_i\}, i \leftarrow 1$ که $w \leftarrow V - \{v_1\}, v_1 \in V$, $T = f$.

2) برای $1 \le i \le n-1$ ، فرض $P = \{v_1,...,v_i\}$ ، $T = \{e_1,...,e_{i-1}\}$, $N = V - P$ ، به T یال دارای کمترین هزینه را که راسی مثل $x \in P$ را به راسی مثلا $y = (v_{i-1})$ ، از N وصل می کند ، اضافه می کنیم، $N \leftarrow N - \{y\}, P \leftarrow P \cup \{y\}$

3) $i \leftarrow i+1$ ، اگر $i = n$ زیر گراف تعریف شده به وسیله ی یال ها $e_1,...,e_{n-1}$ همبند دارای n راس و $n-1$ یال است و درخت پوشای مینیمم برای G است. اگر $i < n$ الگوریتم از مرحله 2 تکرار می شود.

پایان فصل هفتم