بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ : واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل سوم : توابع

تعریف : اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B به صورت $f : A \to B$ نمایش داده می شود.

اگر $a \in Dom(f)$ باشد $f(a)$ فقط شامل یک عضو از B است و اگر $a \notin Dom(f)$ باشد $f(a) = f$ می باشد.

نکته : رابطه f به صورت زوجهای مرتب تعریف می شود : $f(a) = b$ $\{(a, f(a)) \mid a \in Dom(f)\}$

شکل

تابع نگاشت یا تبدیل : a برابر است با آرگومان تابع f و $b = f(a)$ برابر است با مقدار تابع برای آرگومان.

نکته : $f(a)$ را تصویر a تحت تبدیل f می گویند.

ترکیب توابع : اگر f و g دو تابع باشند به صورت $\begin{cases} f : A \to B \\ g : B \to C \end{cases}$ و چون f و g دو رابطه هستند پس ترکیب آنها (gof) نیز یک رابطه است.

$gof(a) = g(f(a)) = g(b)$

شکل

$a \in Dom(gof)$

$gof(a) = c$ جواب منحصر به فرد

توابع ویژه (پوشا و یک به یک) : اگر f تابعی از A به B باشد گوییم f همه جا تعریف شده است اگر $Dom(f) = A$ و f پوشاست اگر $Ran(f) = B$

و f یک به یک است هرگاه : $\begin{cases} f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \\ or \\ f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b \end{cases}$

همچنین $f : A \to B$ را **وارون پذیر** گویند هرگاه رابطه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

نکته : یک تابع الزاما وارون پذیر نیست.

چند قضیه : هرگاه $f: A \to B$ آنگاه

1) f^{-1} یک تابع از B به A است $\Leftrightarrow$ f یک به یک است.

2) اگر f^{-1} یک تابع باشد $\Leftarrow$ f^{-1} یک به یک است.

3) f^{-1} همه جا تعریف شده باشد $\Leftrightarrow$ f پوشا باشد.

4) f^{-1} پوشاست – همه جا تعریف شده باشد.

5) $I_B of = f$

6) $foI_A = f$

7) $f^{-1}of = I_A$ اگر f تناظر یک به یک باشد

8) $fof^{-1} = I_B$ اگر f تناظر یک به یک باشد

9) اگر $f: A \to B$ و $g: B \to A$ توابعی باشند به گونه ای که $gof = I_A$ و $fog = I_B$ ، در این صورت f یک تناظر یک به یک بین A و B و g یک تناظر یک به یک بین B و A بوده و هردو وارون همدیگر می باشند.

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

10) اگر A و B دو مجموعه متناهی با تعداد عناصر یکسان و $f: A \to B$ یک تابع همه جا تعریف شده باشد آنگاه :

الف) اگر f پوشا باشد $\leftarrow$ f یک به یک است

ب) اگر f یک به یک باشد $\leftarrow$ f پوشاست

اصل لانه کبوتر

$f: A \to B$ تابعی با دامنه و برد متناهی می باشد

f یک به یک باشد آنگاه $m = n$	$\lvert Dom(f)\rvert = n$ (تعداد عناصر (کبوتران
f یک به یک نباشد آنگاه $m < n$	$\lvert Ran(f)\rvert = m$ (تعداد عناصر (لانه ها

تعریف : اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود و $m < n$ ، آنگاه دست کم یک لانه شامل دو کبوتر یا بیشتر است.

تعمیم اصل لانه کبوتر : اگر m لانه وجود داشته باشد ولی تعداد کبوترها بیشتر از $n = 2m$ باشد، بدیهی است که سه کبوتر و یا بیشتر باید به یکی از لانه ها منسوب شوند.

نکته : به عبارتی اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود یکی از لانه ها دست کم $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ (کران بالای تقسیم)

و یا $\left[\frac{n-1}{m} \right] + 1$ کبوتر باشد.