بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای

گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ : واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل ششم : مروری بر نظریه ی گرافها

بسیاری از مسائل روزمره ی زندگی را می توان به صورت انتزاعی توسط مجموعه ای گسسته از اشیا و روابط دودویی تعریف شده بر آن بیان کرد. در این گونه مسائل نمایش گرافیکی مناسب ترین روش نمایش است. این امر به مطالعه ی **نظریه ی گرافها** منجر می شود.

تعاریف :

- گراف سودار به صورت زوج مرتب (V,E) است، که در آن V مجموعه ای از متناهی از رئوس و E رابطه ای دودویی در V می باشد.
- عناصر V را رئوس و زوج مرتب های E را یال های گراف **سودار** می نامیم.
- یک یال حادث با رئوسی است که به وسیله ی آن به هم وصل می شوند. یال (a,b) حادث از a و حادث به b است. a راس ابتدایی و b راس انتهایی است.
- دو راس **مجاور** خوانده می شوند که به وسیله ی یالی به هم وصل می شوند.
- یک راس **منفرد** است هرگاه هیچ یالی با آن حادث نباشد واگر یالی حادث به همان راس باشد **حلقه** نامیده می شود.
- گراف بی سوی G به صورت زوج مرتب (V,E) است که V مجموعه ای متناهی و E مجموعه ای از مجموعک های دو عنصری از V است.
- دو گراف را **یکریخت** می گییم هر گاه یک تناظر یک به یک بین رئوس و یک تناظر یک به یک بین یال های آن موجود باشد و مفهوم حادث بودن محفوظ بماند.
- اگر $G(V,E)$ باشد $G'(V',E')$ را زیر گراف G گوییم هرگاه $E' \subseteq E$ و $V' \subseteq V$ به طوری که یال های E' تنها با رئوس V' حادث باشند.
- اگر یک زیر گراف از G شامل تمامی رئوس V باشد آن را زیر گراف **پوشا** می خوانیم.
- مکمل زیر گراف G' نسبت به G زیر گرافی چون $G''(V'',E'')$ است که $E'' = E - E'$ و V'' رئوسی را شامل می شود که یال های E'' با آنها حادثند.
- فرض کنید $f \neq U \subseteq V$ زیر گراف $G_1(U,E_1)$ را زیر گراف **القا** گوییم هرگاه E_1 شامل تمام یال هایی باشد که رئوس انتهایی آنها در U وجود دارد.
- گراف **کامل** بی سوی n راسی را با k_n نشان می دهیم که بین هر دو راس متمایز آن یالی است. همچنین است گراف سودار n راسی.

- مکمل گراف G با n راس مکمل آن نسبت به k_n است و با $\overline{G}$ نمایش داده می شود.
- اگر برای گراف $G(V,E)$ ، E یک مجموعه ی چندگانه از زوج های مرتب از $V\times V$ باشد آنگاه G را یک گراف **چندگانه ی سودار** گوییم.
- در گراف های سودار و بی سوی چندگانه هیچ محدودیتی برای تعداد پیکانها از یک نقطه به نقطه ی دیگر وجود ندارد.
- گراف معمولی یا چندگانه را با نام گراف نام می بریم. اگر بخواهیم تاکید کنیم گراف غیر چندگانه را گراف **خطی** می نامیم.
- یک گراف **وزن دار** را به صورت چهارتایی (V,E,f,g) یا سه تایی (V,E,g) تعریف می کنیم که در آن ها V رئوس E یال ها و f تابعی با دامنه ی V و g تابعی با دامنه ی E هستند. g,f بیانگر انتساب وزن ها به رئوس و یالها هستند.
- در یک گراف سودار **مسیر** رشته ای از یالها مثل $e_{i1},e_{i2},...,e_{ik}$ به گونه ای است که راس انتهایی e_{ij} منطبق بر راس ابتدایی e_{ij+1} است. مسیر را رشته ای از رئوس نیز می توان نمایش داد.
- مسیر را **ساده** می گوییم اگر هیچ یالی در آن تکرار نشود و **ابتدایی** گوییم هر گاه هیچ راسی در آن دو بار ملاقات نشود.
- **مدار** مسیری مثل $e_{i1},e_{i2},...,e_{ik}$ است که در آن راس انتهایی یال e_{ik} بر راس ابتدایی e_{i1} منطبق باشد.
- مدار **ساده** است هرگاه شامل یال تکراری نباشد و **ابتدایی** است هرگاه هیچ راسی در آن دو بار ملاقات نشود.
- گراف بی سو را **همبند** می نامیم هرگاه بین هر دو راس دلخواه مسیری موجود باشد.در غیر این صورت **ناهمبند** است.
- گراف سودار همبند است هرگاه گراف بی سوی حاصل از آن همبند باشد.
- هر گراف نا همبند شامل چندین زیر گراف همبند است که هر کدام را یک **مؤلفه** برای گراف می نامیم.
- یک گراف سودار **همبند قوی** است هرگاه به ازای هر دو راس a و b هم مسیری از a به b و هم مسیری از b به a موجود باشد.

مثال : در بازی حماقت لحظه ای 4 مکعب با وجه هایی به رنگ های متفاوت (در کل 4 رنگ متفاوت) داریم. می خواهیم آنها را روی هم بچینیم به طوری که در هر ستون 4 رنگ متفاوت دیده شود. برای این کار در حالت عمومی برای 4 مکعب یک گراف چندگانه ی وزن دار تشکیل داده و سعی خواهیم کرد دو زیرگراف با ویژگی های زیر در آن پیدا کنیم.

1) هر زیرگراف باید شامل 4 راس و 4 یال با برچسب های مختلف باشد.
2) در هر زیرگراف درجه ی هر راس باید دقیقا برابر 2 باشد.
3) دو زیرگراف نباید یال مشترک داشته باشند.

- مسیر و مدار اولری به مسیر و مداری گفته می شود که از هر کدام از یال های گراف تنها و تنها یک بار عبور کند.
- درجه ی هر راس تعداد یال های حادث با آن تعریف می شود. درجه ی هر راس V را با $\deg(V)$ نمایش می دهند.

لم 1 : در یک گراف بی سو $G(V,E)$ رابطه ی زیر را داریم.

$\sum_{v\in V} V_v \deg(v) = 2|E(G)|$ که $|E(G)|$ تعداد یالها می باشد.

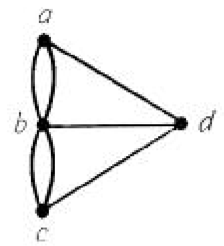
لم 2 : در یک گراف بی سو تعداد رئوس از درجه فرد همیشه زوج است.

$\sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{fard} \deg(v) = \sum_{zoj} \deg(v) = 2|E(G)|$ زوج است

قضیه : گراف بی سوی $G(V,E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر راسی از درجه فرد نداشته باشد.

لم 3 : گراف بی سوی G دارای مسیر اولری است اگر و تنها اگر همبند بوده و حداکثر دو راس از درجه فرد داشته باشد.

مثال : یکی از سرگرمی های مردم کانیگزبرگ این بود که با شروع از یک نقطه از هفت پل واقع بر رودخانه ی پرگل تنها و تنها یک بار عبور کرده به نقطه ی عزیمت خود برگردند. نقشه را می توان به صورت گرافی که یالهای آن پل ها و رئوس آن جزیره ها و دو طرف رودخانه هستند نشان داد.



اولر که پدر نظریه ی گرافها لقب گرفته نشان داد حل مساله در گرو پیدا کردن یک مدار اولری در این گراف است که با توجه به 4 راس درجه ی فرد آن نه مسیر و نه مدار اولری در این گراف موجود نمی باشد.

- برای گراف سودار $G(V,E)$ **درجه ی ورودی** یک راس مثل v برابر تعداد یال های حادث به آن و **درجه ی خروجی** یک راس برابر تعداد یال های حادث از آن تعریف می شود. درجه ی ورودی را با $\deg^-(v)$ و درجه ی خروجی را با $\deg^+(v)$ نمایش می دهیم.
- هر حلقه در گراف سودار موجب افزایش یک واحد به $\deg^-(v)$ و یک واحد به $\deg^+(v)$ می شود.

قضیه : گراف سودار $G(V,E)$ دارای **مدار اولری** است اگر و تنها اگر همبند بوده و برای هر $v\in V$ داشته باشیم $\deg^+(v)=\deg^-(v)$.

و دارای **مسیر اولری** است اگر و تنها اگر همبند بوده و به استثنای دو راس مثل a و b برای هر راس $\deg^+(v)=\deg^-(v)$ برقرار باشدو برای رئوس a و b نیز داشته باشیم :

$$\deg^+(b)=\deg^-(b)+1 \quad , \quad \deg^-(a)=\deg^+(a)+1$$

مسیر و دور هامیلتونی : مسیر (دور) هامیلتونی به مسیری (دوری) گفته می شود که از هر راس گراف فقط و فقط یک بار عبور کند.

- تنها راه حل برای نشان دادن اینکه گرافی دارای مسیر هامیلتونی است تشکیل صریح آن است.
- اگر گرافی دارای دور هامیلتونی باشد همبند است.

چند نکته مفید برای بدست آوردن یک دور هامیلتونی در گراف $G(V,E)$.

1) اگر G دور هامیلتونی دارد برای هر راس $v\in V$, $\deg(v)\geq 2$.
2) اگر برای $a\in V$, $\deg(a)>2$، در زمان تشکیل دور هامیلتونی به محض عبور از راس a می توان همه ی یال های حادث با آن را حذف کرد.
3) اگر برای $a\in V$, $\deg(a)>2$ دو یال حادث با راس a باید در دور هامیلتونی قرار بگیرند.
4) در زمان تشکیل دور هامیلتونی برای G نمی توانیم دوری برای یک زیر گراف از G تشکیل دهیم مگر اینکه همه ی رئوس را شامل شوند.

راهی برای نشان دادن اینکه بعضی گراف ها مسیر هامیلتونی ندارند :

رئوس را با x و y طوری برچسب می زنیم که راس x حادث با y و راس y حادث با x باشد. دور هامیلتونی شامل $|V|$ راس است که از x و y های متوالی ظاهر شده سپس تعداد x و y باید به اندازه $\frac{|V|}{2}$ موجود باشد.

دور هامیلتونی در یک گراف کامل :

مثال : هفده نفر می خواهند در یک میز گرد به شیوه هایی بنشینند که هر بار دو طرف یک شخص افراد متفاوتی نشسته باشند.

در گراف کامل K_n ، $n \geq 3$، nراس و $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ یال موجود است. و حداکثر $\frac{n-1}{2}$ دور هامیلتونی با یال های متفاوت موجود است. بنابراین به $\frac{16-1}{2} = 8$ روش ممکن می توانند بنشینند.

تعریف : یک گراف کامل سودار با n راس که با K_n^* نمایش داده می شود گرافی است سودار و با n راس به طوری که برای هر دو راس x و y ، (x,y) یا (y,x) موجود باشد. K_n^* را چرخه می گوییم.

قضیه : K_n^* دارای یک مسیر (سودار) هامیلتونی است.

اثبات به شیوه ی استقرا :

1) $n = 2$ درست است.

2) K_n^* دارای مسیر هامیلتونی است. (فرض)

3) اگر از K_{n+1}^* راس v_{n+1} را حذف کنیم، گراف K_n^* بدست می آید که مسیر هامیلتونی نام دارد، دو امکان وجود خواهد داشت
الف) برای $1 \leq k \leq n$ یال های (v_k, v_{n+1}) , (v_{n+1}, v_{k+1}) در گراف هستندکه در این صورت آنها را با یال (v_k, v_{k+1}) جایگزین می کنیم.
ب) (v_n, v_{n+1}) در K_{n+1}^* است که در این صورت این یال به مسیر اولیه در فرض مسئله اضافه می شود.

قضیه : اگر $G(V,E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با nراس باشد، اگر برای هر $x, y \in V$ رابطه ی $\deg(x) + \deg(y) \geq n-1$ برقرار باشد G دارای مسیر هامیلتونی است.

اثبات : G همبند است چون در غیر این صورت C_1, C_2 دو مؤلفه ی گراف با n_1, n_2 راس بوده و داریم :

$$\begin{cases} y \in C_2 \to \deg(y) \le n_2 - 1 \\ x \in C_1 \to \deg(x) \le n_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(x) + \deg(y) \le n - 2$$ که با فرض تناقض دارد

لـم : اگـر $G(V,E)$ یـک گـراف بـی سـوی بـدون حلقـه بـا n راس باشـد، اگـر بـرای هـر $v \in V$, $\deg(v) \ge \frac{n-1}{2}$ آنگاه G مسیر هامیلتونی دارد.

قضیه : اگر $G(V,E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با $|V| = n \ge 3$ راس باشد و بـرای هـر دو راس دلخواه و غیر مجاور x و y رابطه ی $\deg(x) + \deg(y) \ge n$ برقرار باشد آنگاه G یک دور هامیلتونی دارد.

کوتاه ترین مسیر ها در گراف های وزن دار (الگوریتم دیکسترا) :

فرض کنید $G(V,E,W)$ یک گراف وزن دار است.وزن یالی مثـل (i,j) با $w(i,j)$ نـشان داده شـده و آن را طول آن یال می نامیم. طول یک مسیر در G مجموع طول یال های تشکیل دهنده ی آن است.

نکته : مسئله مهم تعیین کوتاه ترین مسیر از یک راس به راس دیگر مثل a تا z است.برای این کار از الگوریتم دیکسترا استفاده می کنیم.

الگوریتم دیکسترا :

1) در ابتدا $T = V - \{a\}$ و برای هر $t \in T$, $l(t) = w(a,t)$ و $p = \{a\}$. $l(t)$ را کوتاه تـرین مسیر از a به t می نامیم به طوری که شامل هـیچ راس دیگـری از T نباشـد.$l(t)$ را انـدیس t نسبت به p می گوییم و اگر مسیری وجود نداشت برابر ∞ قرار می دهیم.
2) فرض می کنیم $x \in T$ راسی است که کوچکترین اندیس نسبت به p را دارد.
3) اگر x راسی باشد که می خواهیم از a به آن برسیمدر این صورت الگوریتم خاتمه می یابد. در غیـر این صورت $P' = PU\{x\}$ و $T' = T - \{x\}$ و برای هـر $t \in T'$ انـدیس آن را بـا اسـتفاده از رابطه $l'(t) = \min\{l(t), l(x) + w(x,t)\}$ حساب می کنیم.
4) مراحل 2 و3 را با p' به جای P و T' به جای T تکرار می کنیم.

اگر در مرحله دوم این الگوریتم رئوسی را ذخیره کنیم که منجر به کوتاه ترین مـسیر از a بـه x مـی شـوند نـه تنها کوتاه ترین مسیر از a به x بلکه خود این مسیر را نیز به دست خواهیم آورد.

نکته : پیدا کردن دور هامیلتونی دارای کمترین وزن به ویژه برای n های بزرگ عملا امکان پذیر نیست.

قاعده ی نزدیک ترین همسایه :

فرض می کنیم $G(V,E,W)$ گراف وزن دار بی سو با n راس است. قاعده ی نزدیکترین همسایه برای بدست آوردن دور هامیلتونی نیمه بهینه H به صورت زیر است.

1) فرض می کنیم $x \in V$ یک راس دلخواه از V است $a \leftarrow x \,,\, H \leftarrow f \,,\, P \leftarrow \{x\}$ (اولین راس H)

2) برای $i=1$ تا $i=n-1$:
فرض $y \in V$, $y \notin P$ راسی که $w(x,y)$ آن کمترین مقدار است.
$x \leftarrow y, P \leftarrow P \cup \{y\}, H \leftarrow H \cup \{x,y\}$

3) $H \leftarrow H \cup \{x,a\}$ (یال ایجاد شده با اولین و آخرین راس را اضافه می کنیم)

تعریف : گراف $G(V,E)$ را **هامنی** گویند هرگاه G را بتوان در صفحه به گونه ای رسم کرد که یال های آن تنها در رئوس G متقاطع باشند.

تعریف : گراف G را **دو بخشی** گوییم هرگاه $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = f$ و برای هر یال یک راس متعلق به V_1 و دیگری متعلق به V_2 باشد، اگر هر راس از V_1 به تمام رئوس V_2 وصل باشد گراف را **دوبخشی کامل** می گوییم. در حالت اخیر که $|V_1| = m$, $|V_2| = n$، G را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

تعریف : فرض کنید G یک گراف بی سو و بی حلقه است که درآن $E \neq f$ اگر یال $e = \{v,w\}$ را حذف و $\{u,v\}$, $\{w,v\}$ را اضافه کنیم که $v \in G$ در این صورت یک **زیر بخش مقدماتی** از G حاصل خواهد شد.

تعریف : گراف های بی سو و بی حلقه G_1, G_2 را **همریفت** گوییم هرگاه یکریفت باشند یا از یک گراف بی سو و بی حلقه ی H به وسیله یک رشته از زیربخش ها بدست آیند.

تعریف : یک **ناحیه** از گراف هامنی ناحیه ای از صفحه است که به یال های گراف محدود بوده و دیگر قابل تقسیم به زیرنواحی نیست. اگر گراف را در امتداد یال ها ببریم ناحیه ها جدا می شوند.

نکته : یک ناحیه **متناهی** است هرگاه مساحت آن متناهی باشد در غیر این صورت **نامتناهی** است.

قضیه : فرض کنید G یک گراف همبند و هامنی با $|V| = v, |E| = e$ است. اگر r تعداد نواحی تعریف شده به وسیله ی G باشد آنگاه داریم $v - e + r = 2$

اثبات با استقرا :

$$1)\ \ e=1\begin{cases} v=1\rightarrow r=2 \\ v=2\rightarrow r=1 \end{cases}$$

$2)\ \ e=k \qquad v-k+r=2$ فرض

$3)\ \ e=k+1\Rightarrow$

$A)$ با حذف a داریم $\rightarrow G$ راسی از درجه 1 دارد

$$(v-1)+r-k=2\rightarrow[(v-1)+1]-(k+1)+r=v-e+r=2$$

$B)$ با حذف a داریم $\rightarrow G$ راسی از درجه 1 ندارد

$$(v-1)-k+(r-1)=2\rightarrow[(v-1)+1]-(k+1)+[(r-1)+1]=2$$

لم : فرض کنید که G یک گراف بی سوی همبند، هامنی و بدون حلقه با $|V|=v\ ,\ |E|=e>2$ است،
در این صورت : $e\le 3v-6$

اثبات : اگر b تعداد همه ی یال های مرزی برای نواحی باشد

$$\frac{2e}{3}\ge r \quad \text{یا} \quad 2e\ge 3r \quad \Leftarrow b\le 2e\ ,\ b\ge 3r$$

$$2=v-e+r\le\frac{2e}{3}+v-e=r-\frac{e}{3}\rightarrow e\le 3v-6$$

در نتیجه اگر G گرافی خطی همبند و بدون حلقه با $|E|>2$ یال باشد و $e>3v-6$ آنگاه G هامنی نیست.

قضیه (کوراتاوسکی) : گراف G هامنی است اگر و تنها اگر دارای زیرگرافی همریخت با k_5 یا $k_{3,3}$ نباشد.

پایان فصل ششم