بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای

گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ و تدوین: واحد فناوری انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل دوم : روابط

فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند. یک رابطه دودویی R از A به B زیر مجموعه ای از $A\times B$ است.

$$R\subseteq A\times B \quad , \quad (a,b)\in R \Rightarrow aRb$$

اگر $A=B\Rightarrow R$ یک رابطه از A به B است $R\Rightarrow$ یک رابطه در A است.

ماتریس و روابط

اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه میتوان ماتریسی $n\times m$ مثل $M_R=[M_{ij}]$ را نمایش داد :

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\ 0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

نکته : ماتریسی که فقط دارای مؤلفه های صفر و یک باشد ماتریس بولی نامیده می شود.

نکته : اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه مجموعه نسبی x نسبت به R وجود دارد که با $R(x)$ نمایش داده می شود.

$$R_{(x)}=\{y\mid y\in B, xRy\}$$

قضیه : اگر R یک رابطه از A به B و A_1 و A_2 دو زیر مجموعه از A باشد آنگاه داریم:

$$A_1\subseteq A_2\Rightarrow R(A_1)\subseteq R(A_2)$$
$$R(A_1\cup A_2)=R(A_1)\cup R(A_2)$$
$$R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_1)\cap R(A_2)$$

قضیه : اگر R و S دو رابطه از A به B باشند، اگر به ازای هر $a\in A$ ، $R(a)=S(a)$ باشد آنگاه $S=R$ است.

تعریف : اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ در ماتریس بولی $n\times m$ باشد آنگاه $A\vee B$ و $A\wedge B$ به صورت زیر است :

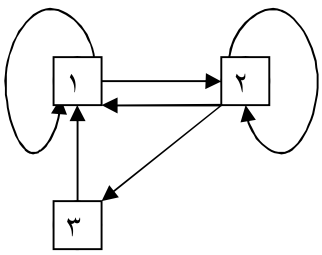
$$A\vee B=\begin{cases}1 & if\,(a_{ij}=1 \;\; or \;\; b_{ij}=1)\\ 0 & if.not\end{cases} \qquad A\wedge B=\begin{cases}1 & if\,(a_{ij}=1 \;\; and \;\; b_{ij}=1)\\ 0 & if.not\end{cases}$$

تعریف : حاصلضرب بولی برای دو ماتریس A و B به اندازه $n\times p$ و $m\times p$ به صورت زیر است :

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & if\,(a_{ik}=1 \;،\; b_{kj}=1 \;،\; \exists k \;،\; 1\le k\le p) \\ 0 & if\,.not \end{cases}$$

گراف های سوردار : اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد رابطه R را به صورت نموداری نمایش داد. یک دایره کوچک برای هر کدام از عناصر رسم کرده و این دایره ها را به عنوان رئوس یاد خواهیم کرد و خطوط سورداری به نام یال که از راس a_i به راس a_j رسم می کنیم $a_i R a_j \iff$

مثال:



نکته : مسیری که از راسی شروع شده و به خودش خاتمه پیدا کند مدار نامیده می شود.

مدار به طول یک را حلقه می نامیم.

هر یال در گراف سوردار یک مسیر به طول یک تلقی می شود.

تعریف : $xR^{\infty}y$، هرگاه مسیری از x به y در A موجود باشد . در بعضی اوقات R^{∞} را رابطه (مسیر) ارتباطی برای A می گویند.

نکته : یک مسیر به طول n باید دارای $n+1$ عنصر از A باشد.(عناصر الزاما متمایز نیستند)

قضیه : اگر R یک رابطه در $A=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ باشد آنگاه

نکته : مکان $a(i,j)$ام از ماتریس دارای مقدار 1 است اگر و تنها اگر $n_{ij}=1$ باشد.

قضیه : فرض کنید $A=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد آنگاه :

(**n** بار)

رابطه ی دسترسی :اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد R^* یک رابطه ی دسترس پذیر است.
(I_n ماتریس واحد $n \times n$ است و n تعداد عناصر مجموعه A است)

$xR^* y \Leftrightarrow xR^\infty y$ یا $x = y$

$M_{R^*} = M_{R^\infty} \vee I_n$

خواص روابط

روابط بازتابی : رابطه ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ باشد آنگاه aRa.

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in R(a)$$

- در ماتریس یک رابطه بازتابی همه عناصر آن قطر اصلی ماتریس می باشند.
- گراف سوردار یک رابطه بازتابی دارای حلقه برای تک تک رئوس است.

روابط ضد بازتابی : رابطه ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ آنگاه $a\not R a$.

- در ماتریس یک رابطه ضد بازتابی قطر اصلی آن همگی صفر می باشند.
- گراف سوردار یک رابطه ضد بازتابی فاقد حلقه می باشد.

روابط متقارن و ضد متقارن : رابطه R در مجموعه A متقارن است اگر دو عنصر متمایز a و b موجود باشد بطوریکه aRb و bRa و $a \neq b$. در غیر این صورت نا متقارن است : $a \in R(b) \Leftrightarrow b \in R(a)$

نکته : نتیجه می گیریم که زمانی که رابطه نا متقارن است و اگر aRb و bRa آنگاه $a = b$.

- یک ماتریس زمانی متقارن است که $M_R = M_R^{\ T}$.(یعنی ماتریس با ترانهاده ی خود برابر باشد)
- یک ماتریس زمانی ضد متقارن است که اگر $i \neq j$ بود یکی از عناصر M_{ij} یا M_{ji} باید مساوی صفر باشد.
- یک ماتریس می تواند نه متقارن باشد نه ضد متقارن.
- در گرافهای سور دار یک رابطه متقارن اگر یالی از راس i به j موجود باشد آنگاه یالی نیز از j به i موجود می باشد و هیچ شرطی برای $i = j$ وجود ندارد.
- اگر شرط فوق در گراف وجود نداشت آن گراف مربوط به یک رابطه ی ضد متقارن است.

روابط متعدی : رابطه R در A متعدی است هرگاه برای $a,b,c \in A$ آنگاه :

$aRb, bRc \Rightarrow aRc$ متعدی

$aRb, bRc \Rightarrow a\not R c$ نامتعدی

نکته : یک رابطه متعدی را می توان از روی ماتریس رابطه ی آن $M_R = [m_{ij}]$ تشخیص داد اگر

$m_{ik} = 1, m_{kj} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1$

همچنین با توجه به گراف سوردار داریم که اگر از a به c مسیری به طول 2 در R داشته باشیم آنگاه یک یال نیز از a به c داریم. به عبارتی : $aRb, bRc \equiv aR^2c$

$\rightarrow aR^2c \Rightarrow aRc \Rightarrow R^2 \subseteq R$

قضیه : مفهوم هندسی متعدی بودن رابطه R در مجموعه A چنین است که اگر مسیری به طول بیشتر از یک از راس a به راس b موجود باشد آنگاه یالی از a به b موجود باشد.

$\forall n \geq 1, R^n \subseteq R \Leftrightarrow$ متعدی بودن

نکته : در ضمن متعدی بودن رابطه ی R را می توان به این صورت توضیح داد :

$b \in R(a), c \in R(b) \Rightarrow c \in R(a)$

روابط هم ارزی : رابطه ی R در A را هم ارز گوییم هرگاه بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

- اگر P یک افراز از مجموعه A باشد بنابر این P را میتوان برای تشکیل یک رابطه ی هم ارزی در A به کار برد.
- مجموعه های موجود در افراز P را بلوک های P گویند.
- اگر c,b,a در بلوک P از مجموعه A باشند و سه خاصیت بازتابی و تقارن و تعری را دارا باشند آنگاه R یک رابطه ی هم ارزی تعیین شده توسط افراز P می باشد.
- هر عضو از یک بلوک فقط و فقط با اعضای همان بلوک در رابطه است.

قضیه : فرض کنید R یک رابطه هم ارزی در A و $b \in A, a \in A$ باشد در این صورت aRb اگر و تنها اگر $R(a) = R(b)$ باشد.

قضیه : اگر R یک رابطه هم ارزی در A و P مجموعه ی همه ی مجموعه های نسبی و مجزای $R(a)$ برای $a \in A$ باشد در این صورت P یک افراز برای A و R یک رابطه هم ارزی تعیین شده توسط P است.

تعریف : اگر R یک رابطه هم ارزی در A باشد آنگاه $R(a)$ ها را کلاسهای هم ارزی R می گوییم.

$R(a) = [a]$ (شامل همه کلاسهای هم ارز A/R)

عملیات بر روابط

اگر S و R دو رابطه از A به B باشد این روابط مجموعه ای از زوجهای مرتب هستند که تمامی اعمال مانند اجتماع و اشتراک و تفاضل و ...اعمال کرد

متمم $\quad \overline{R} : a\overline{R}b \Leftrightarrow a\not{R}b$

اجتماع $\quad a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb$ یا aSb

اشتراک $\quad a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb$ و aSb

معکوس $\quad R^{-1} : aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a \qquad \begin{cases} Dom(R^{-1}) = Ran(R) \\ Dom(R) = Ran(R^{-1}) \end{cases}$

نکته : R^{-1} شامل همه زوجهای مرتب R است که به صورت معکوس نوشته شده اند. $(R^{-1})^{-1}=R$

نکته: در ماتریس معکوس جای سطر و ستون عوض می شود $(M_R)^{-1}=(M_R)^T$

تعریف : برای ماتریس بولی $M=[m_{ij}]$، متمم آن یعنی $\overline{M}=[\overline{m}_{ij}]$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\overline{m}_{ij}=\begin{cases}0 & m_{ij}=1\\ 1 & m_{ij}=0\end{cases}$$

قضیه : فرض کنید که R و S دو رابطه از A به B باشد.

1) $R\subseteq S\Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

2) $R\subseteq S\Rightarrow \overline{S}\subseteq \overline{R}$

3) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

4) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

5) $\overline{(R\cup S)}=\overline{R}\cap\overline{S}$

6) $\overline{(R\cap S)}=\overline{R}\cup\overline{S}$

7) اگر R بازتابی باشد آنگاه R^{-1} نیز بازتابی است.

8) اگر R بازتابی باشد آنگاه $\overline{R}$ ضد بازتابی است.

9) اگر R و S بازتابی باشند آنگاه $R\cup S$ و $R\cap S$ نیز بازتابی هستند.

نکته : رابطه R در A متقارن است $\Leftrightarrow R=R^{-1}\Leftrightarrow M_R=(M_R)^T=(M_R)^{-1}=M_R$

قضیه : اگر R متقارن باشد آنگاه $\overline{R},R^{-1}$ نیز متقارن هستند.

همچنین اگر R,S متقارن باشند $R\cap S,R\cup S$ نیز متقارن هستند.

1) $(R\cap S)^2\subseteq R^2\cap S^2$

2) اگر R و S متعدی باشند آنگاه $R\cap S$ متعدی است.

3) اگر R و S رابطه هم ارزی باشد آنگاه $R\cap S$ نیز رابطه هم ارزی است.

بستارها

اگر R یک رابطه در A باشد ممکن است بعضی از خصوصیات هم ارزی را نداشته باشد. می خواهیم با افزودن زوجهایی به آن رابطه ای بدست آوریم که ویژگی های مورد نظر را داشته باشد .

بستار بازتابی : اگر R یک رابطه در A باشد که بازتابی نباشد بعضی از زوجهای رابطه Δ در R را اضافه می کنیم تا کوچکترین رابطه بازتابی شامل R تشکیل شود.

$$R_1 = R \cup \Delta$$

بستار متقارن :به طور فرض داریم رابطه R رابطه ای در A باشد که متقارن نباشد. اگر زوجی مثل $(x,y) \in R$ باشد ولی $(y,x) \notin R$ باشد، بدیهی است $(y,x) \in R^{-1}$. بنابراین برای تبدیل به رابطه متقارن باید زوجهای رابطه R^{-1} را به آن اضافه کنیم.

$R \cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه ی متقارن است. $\qquad R \cup R^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1}$

نکته : بستار متقارن R را می توان به روش هندسی رسم کرد.به این صورت که همه یالها در گراف سوردار R به یالهای دو طرفه در $R \cup R^{-1}$ تبدیل شود.

بستار متعدی و الگوریتم وارشال

قضیه : اگر R یک رابطه در A باشد آنگاه بستار متعدی R رابطه R^{∞} است.

قضیه : اگر $|A| = n$ (تعداد اعضا) و R یک رابطه در A باشد $\quad R^{\infty} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

الگوریتم وارشال : فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_m$ مسیری در R باشد . هر راس غیر از x_1, x_m را راس داخلی مسیر خواهیم گفت.الگوریتم وارشال در دو مرحله خلاصه می شود:

1) ابتدا همه مقادیر W_{k-1} را به W_k منتقل می کنیم
2) فرض کنید که در مکانهای $p_1, p_2, \ldots$ در ستون kام ماتریس W_{k-1} و هم چنین در مکانهای $q_1, q_2, \ldots$ در سطر kام همان ماتریس مقدار $\underline{1}$ داشته باشیم ، در این صورت در مکانهای (p_i, q_j) در ماتریس W_k مقدار $\underline{1}$ قرار دهیم، این الگوریتم را با $W_0 = M_R$ آغاز کرد و W_k های بعدی را تا رسیدن به $(n = |A|), W_n = M_R$ ادامه می دهیم.

کاربرد جالب بستار متعدی در روابط هم ارزی است. اگر S, R دو رابطه هم ارزی باشند در این صورت $R \cap S$ نیز یک رابطه هم ارزی است. $R \cap S$ بزرگترین زیر مجموعه مشمول در S, R است.

قضیه : اگر S, R دو رابطه هم ارزی در مجموعه A باشند در نتیجه کوچکترین رابطه هم ارزی شامل S, R ، رابطه $(R \cup S)^{\infty}$ است.

ترکیب روابط: اگر C,B,A سه مجموعه و R رابطه ای از A به B و S رابطه ای از B به C باشد رابطه جدید از A به C را ترکیب S,R می نامیم و به SoR می خوانیم.

$$\left.\begin{array}{l} a\in A \\ c\in C \end{array}\right\} a(SoR)c \Leftrightarrow b\in B,\begin{cases} aRb \\ bSc \end{cases} \Rightarrow a(SoR)c$$

$$a \xrightarrow[R]{} b \xrightarrow[S]{} c \Rightarrow SoR(A_1) = S(R(A_1)), A_1 \subseteq A$$

قضیه: اگر D,C,B,A چهار مجموعه و R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C و T یک را بطه از C به D باشد داریم:

$$\begin{cases} aRb \\ bSc \\ cTd \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} To(SoR) = (ToS)oR \\ (SoR)^{-1} = R^{-1}oS^{-1} \end{array}$$

پایان فصل دوم